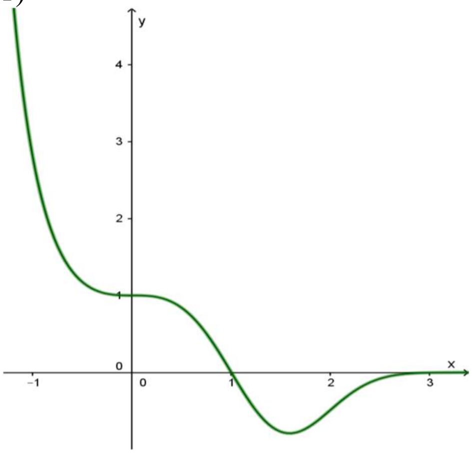
Stetigkeit

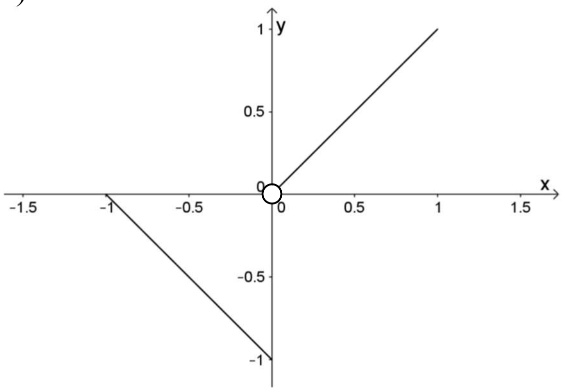
Anschaulich gesprochen heißt eine Funktion f stetig bei $x_0 \in D_f$, wenn ihr Graph dort keinen „Sprung" macht, man ihn also mit dem Bleistift ohne Absetzen durchzeichnen kann.

Beispiele:

1)



2)



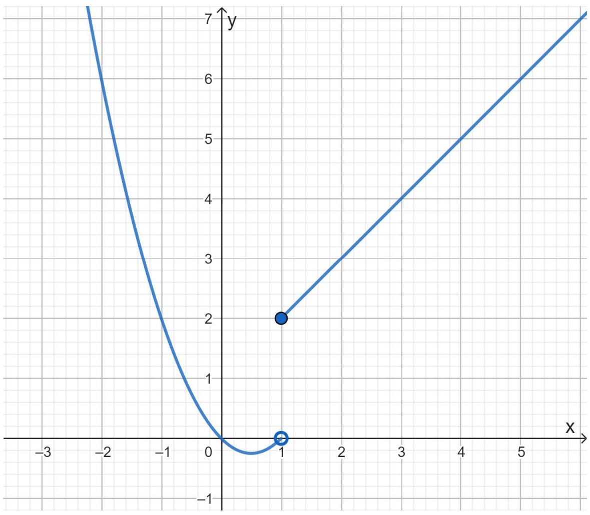
Satz: Alle ganzrationalen Funktionen sind stetig in ganz $\mathbb{R}$.

rechnerisch:

Sind der an einer Stelle der Definitionsmenge

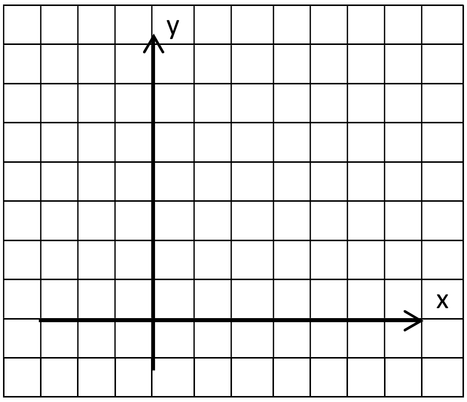
nicht gleich, so ist die Funktion dort nicht stetig, der Graph macht also dort einen Sprung.

Beispiel: $f(x) = \begin{cases} x^2 - x & x < 1 \\ x + 1 & x \geq 1 \end{cases}$



„linksseitiger = rechtsseitiger Grenzwert“ genügt aber nicht für Stetigkeit!
Beispiel:

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{für } x = 2 \\ 1 & \text{für } x \neq 2 \end{cases}$$

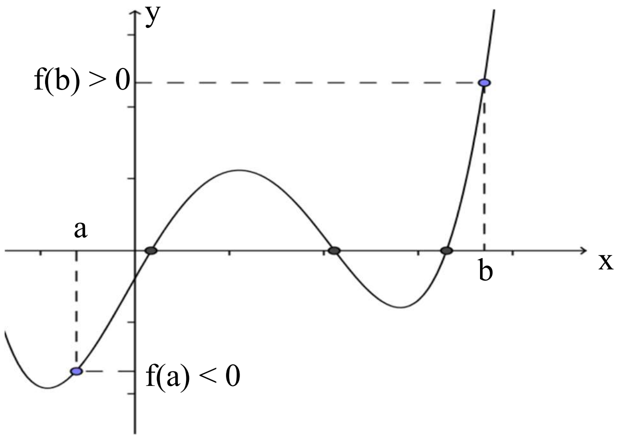


➔ Außer dem (links- und rechtsseitigen) Grenzwert muss auch der an dieser Stelle gleich sein!

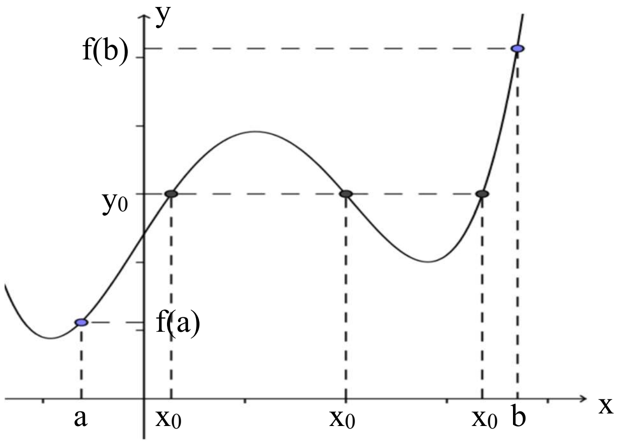
Definition: Eine Funktion f heißt <u>stetig</u> bei $x_0 \in D_f$, wenn gilt   bzw. ausführlicher (insbesondere an Nahtstellen wichtig!)

Sätze über stetige Funktionen

1) **Nullstellensatz** (von Bolzano)**:** Ist eine Funktion f in einem Intervall [a;b] stetig und haben f(a) und f(b) verschiedene Vorzeichen, dann hat f in diesem Intervall mindestens (!) eine Nullstelle.



2) Daraus folgt der **Zwischenwertsatz:** Ist eine Funktion f in einem Intervall [a;b] stetig und gilt $f(a) \neq f(b)$, dann gibt es für alle Zahlen y_0 zwischen f(a) und f(b) mindestens (!) eine Stelle x_0, sodass $f(x_0) = y_0$ ist (d. h. alle Funktionswerte zwischen f(a) und f(b) werden im Intervall [a;b] auch angenommen.)



3) **Extremwertsatz:** Ist eine Funktion f in einem Intervall [a;b] stetig, dann hat f in [a;b] ein Minimum und ein Maximum, d. h. es gibt Stellen x_{min} und x_{max}, sodass für alle x im Intervall gilt: $f(x) \geq f(x_{min})$ und $f(x) \leq f(x_{max})$.