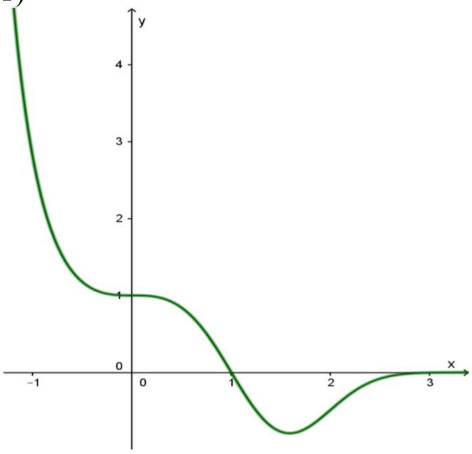
Stetigkeit

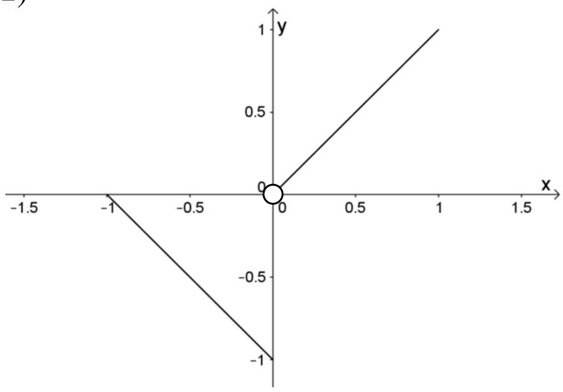
Anschaulich gesprochen heißt eine Funktion f <u>stetig</u> bei $x_0 \in D_f$, wenn ihr Graph dort keinen „Sprung" macht, man ihn also mit dem Bleistift ohne Absetzen durchzeichnen kann.

Beispiele:

1)



2)

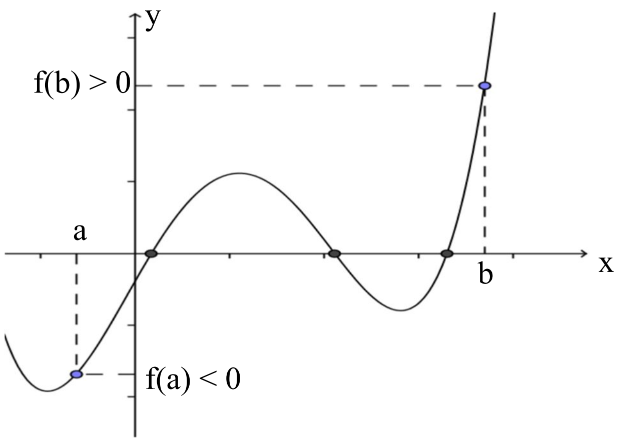


Satz: Alle ganzrationalen Funktionen sind stetig in ganz $\mathbb{R}$.

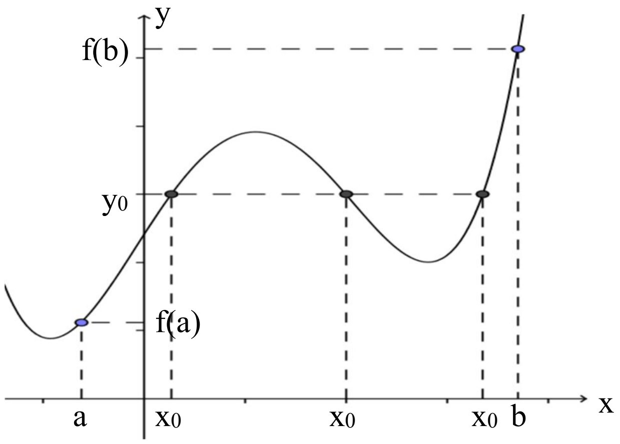
Anmerkung: Mathematisch etwas genauer ausgedrückt gilt: Wenn man in x-Richtung beliebig nahe an den Punkt $(x_0|f(x_0))$ heran geht, dann muss man auch in y-Richtung immer beliebig nahe an den Punkt heran gehen. Um die Stetigkeit an einer Stelle $x_0 \in D_f$ rechnerisch zu überprüfen, muss man deshalb nachrechnen, ob $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ gilt. Da die Grenzwerte von links und von rechts auch noch unterschiedlich sein könnten, muss man i. A. sogar noch ausführlicher prüfen, ob $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = f(x_0)$ gilt. Genauer wird das im Additum (12. Klasse Technik) besprochen.

Sätze über stetige Funktionen

1) **Nullstellensatz** (von Bolzano)**:** Ist eine Funktion f in einem Intervall [a;b] stetig und haben f(a) und f(b) verschiedene Vorzeichen, dann hat f in diesem Intervall mindestens (!) eine Nullstelle.



2) Daraus folgt der **Zwischenwertsatz:** Ist eine Funktion f in einem Intervall [a;b] stetig und gilt $f(a) \neq f(b)$, dann gibt es für alle Zahlen y_0 zwischen f(a) und f(b) mindestens (!) eine Stelle x_0, sodass $f(x_0) = y_0$ ist (d. h. alle Funktionswerte zwischen f(a) und f(b) werden im Intervall [a;b] auch angenommen.)



3) **Extremwertsatz:** Ist eine Funktion f in einem Intervall [a;b] stetig, dann hat f in [a;b] ein Minimum und ein Maximum, d. h. es gibt Stellen x_{min} und x_{max}, sodass für alle x im Intervall gilt: $f(x) \geq f(x_{min})$ und $f(x) \leq f(x_{max})$.