Begründung: Zu allen gebrochenrationalen Funktionen kann man eine Stammfunktion angeben, die aus den elementaren Funktionen zusammengesetzt ist.

Schritt 1: Alle gebrochenrationalen Funktionen können durch Polynomdivision in eine Summe aus einer ganzrationalen Funktion und einer echt gebrochenrationalen Funktion zerlegt werden. Die Stammfunktion des ganzrationalen Summanden ist wieder ganzrational; es muss nur noch der echt gebrochenrationale Teil betrachtet werden.

Schritt 2 (ohne Beweis!): Jede ganzrationale Funktion (also auch die im Nenner des echt gebrochen-rationalen Teils) kann in ein Produkt aus linearen und quadratischen Funktionen zerlegt werden.

Schritt 3 (ohne Beweis!): Jede echt gebrochenrationale Funktion, deren Nenner ein Produkt aus linearen und quadratischen Funktionen ist, kann mittels Partialbruchzerlegung in eine Summe aus echt gebrochenrationalen Funktionen zerlegt werden, in deren Nenner jeweils nur noch einer der Faktoren (evtl. mehrfach) auftaucht.

Es bleiben also nur noch Summanden der folgenden Formen übrig:

$$\int \frac{x^n}{(x+a)^m}\,dx \text{ mit } n < m \quad \text{oder} \quad \int \frac{x^n}{(x^2+px+q)^m}\,dx \text{ mit } n < 2m$$

Schritt 4: Alle Summanden mit linearen Faktoren im Nenner werden durch Substitution u = x + a auf die Form $\frac{(u-a)^n}{u^m}$ gebracht. Den Zähler kann man mit dem binomischen Satz in eine Summe umschreiben, dann kann man jeden Summanden mit dem Nenner kürzen. Es bleibt eine Summe von Potenzfunktionen; die Stammfunktionen davon sind wieder Potenzfunktionen bzw. der ln.

Schritt 5: Alle Summanden mit quadratischen Faktoren im Nenner können durch quadratische Ergänzung und geeignete Substitution auf eine der folgenden Formen (bzw. Summen davon) gebracht werden:

$$\int \frac{u^n}{(u^2+a^2)^m}\,du \quad \text{oder} \quad \int \frac{u^n}{(u^2-a^2)^m}\,du, \quad \text{jeweils mit } n < 2m$$

Schritt 6: Betrachte zunächst die Summanden mit ungeradem n. Durch Substitution von $z = u^2 + a^2$ bzw. $z = u^2 + a^2$ erhält man Integrale der Form

$$\frac{1}{2}\int \frac{(z-a^2)^{(n-1)/2}}{z^m}\,dz \quad \text{oder} \quad \int \frac{(z+a^2)^{(n-1)/2}}{z^m}\,du, \quad \text{jeweils mit } n < 2m,$$

die wie in Schritt 4 in eine Summe von Potenzfunktionen zerlegt werden können; die Stammfunktionen sind wieder Potenzfunktionen bzw. der ln.

Schritt 7: Es bleiben noch Summanden von der Form $\int \frac{u^n}{(u^2+a^2)^m} du$ oder $\int \frac{u^n}{(u^2-a^2)^m} du$ mit geradem n. Betrachten wir zunächst n > 0. In diesen schreibt man den Integranden als Produkt $\int u \cdot \frac{u^{n-1}}{(u^2+a^2)^m} du$ bzw. $\int u \cdot \frac{u^{n-1}}{(u^2-a^2)^m} du$ und integriert partiell. Dies ist möglich, da der zweite Faktor ja jeweils im Zähler eine ungerade Potenz hat und damit wie in Schritt 6 jeweils eine Stammfunktion bestimmt werden kann.

Schritt 8: Zuletzt bleiben noch Summanden der Form $\int \frac{1}{(u^2+a^2)^m} du$ oder $\int \frac{1}{(u^2-a^2)^m} du$. Für m = 1 sind dies elementare Integrale (siehe Formelsammlung). Integrale mit m > 1 schreibt man folgendermaßen um:

$$\int \frac{1}{(u^2 \pm a^2)^m} du = \frac{1}{a^2} \int \frac{a^2}{(u^2 \pm a^2)^m} du = \frac{1}{a^2} \int \frac{a^2 \pm u^2}{(u^2 \pm a^2)^m} du \mp \frac{1}{a^2} \int \frac{u^2}{(u^2 \pm a^2)^m} du$$

$$= \pm \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{(u^2 \pm a^2)^{m-1}} du \mp \frac{1}{a^2} \int \frac{u^2}{(u^2 \pm a^2)^m} du$$

Ist im ersten Summand m–1 > 1, dann macht man genauso weiter, solange, bis der Exponent nur noch 1 ist, und nimmt dafür dann wieder die Formeln aus der Formelsammlung. Den zweiten Summanden kann man wie in Schritt 7 behandeln.

Fertig.

Anmerkungen:

1) Dass Schritt 2 funktioniert, ist meines Wissens mit Schulmitteln praktisch unmöglich zu beweisen.

2) Begründung für Schritt 3: Wie in „Beispiele für Partialbruchzerlegungen, bei denen der Nenner *nicht* in ein Produkt aus lauter unterschiedlichen Linearfaktoren zerfällt" gezeigt wurde, kann man allgemein eine Summe aus echt gebrochenrationalen Termen ansetzen, wobei die Nenner jeweils nur noch eine Potenz eines der Faktoren enthält und die Zähler ganzrationale Funktionen, deren Grad um eins kleiner ist als der jeweilige Nenner. Multipliziert man dann mit dem Hauptnenner, so erhält man eine Gleichung zwischen zwei ganzrationalen Funktionen, deren Grade beide (höchstens) so groß sind wie der Grad des Hauptnenners minus eins. Mit Koeffizientenvergleich ergibt sich dann ein quadratisches lineares Gleichungssystem für die unbekannten Koeffizienten. (Warum hat das immer genau eine Lösung???)