Begründung: Zu allen gebrochenrationalen Funktionen kann man eine Stammfunktion angeben, die aus den elementaren Funktionen zusammengesetzt ist.

Schritt 1: Alle gebrochenrationalen Funktionen können durch Polynomdivision in eine Summe aus einer ganzrationalen Funktion und einer echt gebrochenrationalen Funktion zerlegt werden. Die Stammfunktion des ganzrationalen Summanden ist wieder ganzrational; es muss nur noch der echt gebrochenrationale Teil betrachtet werden.

Schritt 2 (ohne Beweis!): Jede ganzrationale Funktion (also auch die im Nenner des echt gebrochenrationalen Teils) kann in ein Produkt aus linearen und quadratischen Funktionen zerlegt werden.

Schritt 3: Jede echt gebrochenrationale Funktion, deren Nenner ein Produkt aus linearen und quadratischen Funktionen ist, kann mittels Partialbruchzerlegung in eine Summe aus echt gebrochenrationalen Funktionen zerlegt werden, in deren Nenner jeweils nur noch einer der Faktoren (evtl. mehrfach) auftaucht. (Der Beweis dazu, zumindest für den Fall mit nur linearen Faktoren, findet sich auch auf der Homepage.)

Es bleiben also nur noch Summanden der folgenden Formen übrig:

$$\int \frac{x^n}{(x+a)^m}\,dx \text{ mit } n < m \quad \text{oder} \quad \int \frac{x^n}{(x^2+px+q)^m}\,dx \text{ mit } n < 2m$$

Schritt 4: Alle Summanden mit linearen Faktoren im Nenner werden durch Substitution u = x + a auf die Form $\frac{(u-a)^n}{u^m}$ gebracht. Den Zähler kann man mit dem binomischen Satz in eine Summe umschreiben, dann kann man jeden Summanden mit dem Nenner kürzen. Es bleibt eine Summe von Potenzfunktionen; die Stammfunktionen davon sind wieder Potenzfunktionen bzw. der ln.

Schritt 5: Alle Summanden mit quadratischen Faktoren im Nenner können durch quadratische Ergänzung und geeignete Substitution auf eine der folgenden Formen (bzw. Summen davon) gebracht werden:

$$\int \frac{u^n}{(u^2+a^2)^m}\,du \quad \text{oder} \quad \int \frac{u^n}{(u^2-a^2)^m}\,du, \quad \text{jeweils mit } n < 2m$$

Schritt 6: Betrachte zunächst die Summanden mit ungeradem n. Durch Substitution von $z = u^2 + a^2$ bzw. $z = u^2 - a^2$ erhält man Integrale der Form

$$\frac{1}{2}\int \frac{\left(z-a^2\right)^{(n-1)/2}}{z^m}\,dz \quad \text{oder} \quad \int \frac{\left(z+a^2\right)^{(n-1)/2}}{z^m}\,du, \quad \text{jeweils mit } n < 2m,$$

die wie in Schritt 4 in eine Summe von Potenzfunktionen zerlegt werden können; die Stammfunktionen sind wieder Potenzfunktionen bzw. der ln.

Schritt 7: Es bleiben noch Summanden von der Form $\int \frac{u^n}{(u^2+a^2)^m} du$ oder $\int \frac{u^n}{(u^2-a^2)^m} du$ mit geradem n. Betrachten wir zunächst n > 0. In diesen schreibt man den Integranden als Produkt $\int u \cdot \frac{u^{n-1}}{(u^2+a^2)^m} du$ bzw. $\int u \cdot \frac{u^{n-1}}{(u^2-a^2)^m} du$ und integriert partiell. Dies ist möglich, da der zweite Faktor ja jeweils im Zähler eine ungerade Potenz hat und damit wie in Schritt 6 jeweils eine Stammfunktion bestimmt werden kann.

Schritt 8: Zuletzt bleiben noch Summanden der Form $\int \frac{1}{(u^2+a^2)^m} du$ oder $\int \frac{1}{(u^2-a^2)^m} du$. Für m = 1 sind dies elementare Integrale (siehe Formelsammlung). Integrale mit m > 1 schreibt man folgendermaßen um:

$$\int \frac{1}{(u^2 \pm a^2)^m} du = \frac{1}{a^2} \int \frac{a^2}{(u^2 \pm a^2)^m} du = \frac{1}{a^2} \int \frac{a^2 \pm u^2}{(u^2 \pm a^2)^m} du \mp \frac{1}{a^2} \int \frac{u^2}{(u^2 \pm a^2)^m} du$$

$$= \pm \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{(u^2 \pm a^2)^{m-1}} du \mp \frac{1}{a^2} \int \frac{u^2}{(u^2 \pm a^2)^m} du$$

Ist im ersten Summand m–1 > 1, dann macht man genauso weiter, solange, bis der Exponent nur noch 1 ist, und nimmt dafür dann wieder die Formeln aus der Formelsammlung. Den zweiten Summanden kann man wie in Schritt 7 behandeln.

Fertig.

Anmerkung: Dass die Schritte 2 und 3 funktionieren, ist meines Wissens mit Schulmitteln praktisch unmöglich zu beweisen. Für Schritt 2 gibt es halbwegs Beweise, die aber große Vorkenntnisse über Funktionen von komplexen Zahlen benötigen, außerdem auch einen Beweis, der nur reelle Zahlen verwendet – allerdings verstehe ich letzteren leider nicht… („Beweis des sogenannten Fundamentalsatzes der Algebra im reellen Gebiete“ von Ernst Mohr, erschienen 1942 im „Journal für die reine und angewandte Mathematik“, Band 184). Schritt 3 kann man dagegen halbwegs einfach beweisen, aber auch das nur dann, wenn man zumindest Grundkenntnisse über komplexe Zahlen hat:
http://www.mathe.tu-freiberg.de/~wegert/Lehre/AnaMath1/Vrl-2014-01-24.pdf
Einen Beweis, der nur reelle Zahlen verwendet, kenne ich hier leider nicht.

Ergänzungen:

1) Integrale über Funktionen, die aus gebrochenrationalen Funktionen verkettet mit irgendeiner Wurzel $\sqrt[n]{x}$ bestehen, sind also auch alle berechenbar ($u = \sqrt[n]{x}$ substituieren ➔ gebrochenrationale Funktion in u).

2) Integrale über Funktionen, die aus gebrochenrationalen Funktionen verkettet mit e^x bestehen, sind also auch alle berechenbar ($u = e^x$ substituieren ➔ gebrochenrationale Funktion in u).

3) Integrale über Funktionen, die aus gebrochenrationalen Funktionen entstehen, indem man jedes x durch sin(x) und/oder cos(x) ersetzt, sind also auch alle berechenbar (siehe Weierstrass-Substitution).

4) Integrale über Funktionen, die aus einer Verkettung der ln-Funktion mit gebrochenrationalen Funktionen bestehen, sind also auch alle berechenbar (1 einfügen, partiell integrieren ➔ es bleibt ein Integral über eine gebrochenrationale Funktion).

5) Integrale über Funktionen, die aus einer Verkettung der arctan-Funktion mit gebrochenrationalen Funktionen bestehen, sind also auch alle berechenbar (1 einfügen, partiell integrieren ➔ es bleibt ein Integral über eine gebrochenrationale Funktion).