Das Skalarprodukt

Beispiel:
Ein Betrieb verkauft die Produkte A, B, C jeweils zu einem Preis von 10 €, 8 € bzw. 15 €. Wenn an einem Tag 30 Stück von A verkauft werden, 20 Stück von B und 50 Stück von C, dann sind die gesamten Einnahmen:

Zur Abkürzung kann man die Preise in einem „Preisvektor“ $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix}$ und die verkauften Mengen in einem „Mengenvektor“ $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 50 \end{pmatrix}$ zusammenfassen. Die gesamten Einnahmen errechnen sich dann allgemein mit:

Dies schreibt man abkürzend als das sogenannte Skalarprodukt (auch: Punktprodukt oder inneres Produkt) der beiden Vektoren; ein übliches Rechenzeichen dafür ist $\circ$, also:

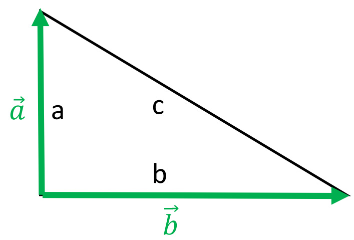
$$\vec{a} \circ \vec{b} =$$

Das Skalarprodukt zweier Vektoren ergibt also immer einen Skalar (eine einzelne Zahl), keinen Vektor!

Rechenregeln:

1) $\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{a}$ (Kommutativgesetz)
2) $(k \cdot \vec{a}) \circ \vec{b} = k \cdot (\vec{a} \circ \vec{b})$ (gemischtes Assoziativgesetz; Vorsicht: Der Malpunkt $\cdot$ bezeichnet hier zwei verschiedene Arten von Produkt!)
3) $\vec{a} \circ (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \circ \vec{c}$ (Distributivgesetz)
4) $\vec{a} \circ \vec{a} =$

Geometrische Bedeutung:
Betrachte ein rechtwinkliges Dreieck:



In diesem gilt bekanntlich der Satz des Pythagoras:

Das kann man aber auch mit den eingezeichneten Vektoren schreiben:

Es folgt: $\boxed{\vec{a} \circ \vec{b} = \quad \Leftrightarrow \vec{a} \quad \vec{b}}$

Verallgemeinerung: In einem *beliebigen* Dreieck gilt der „Kosinussatz“ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\varphi)$, wobei φ der Winkel zwischen den Kanten a und b ist. Mit einer Rechnung ähnlich zu oben folgt dann: $\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$, also umgestellt:

$$\boxed{\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}}$$