Beweise für die Rechenregeln für das Skalarprodukt

Kommutativgesetz:
$\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$ gilt nach Definition

aus derselben Definition folgt sofort: $\vec{b} \circ \vec{a} = |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos(-\varphi)$; der Winkel geht dabei anders herum

$|\vec{a}|$ und $|\vec{b}|$ sind ja aber einfach Zahlen, für diese gilt das übliche Kommutativgesetz: $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = |\vec{b}| \cdot |\vec{a}|$

Außerdem gilt immer: $\cos(-\varphi) = \cos(\varphi)$ (Symmetrie der Cosinus-Funktion)

Damit folgt insgesamt: $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi = |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos(-\varphi)$, also $\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{a}$.

gemischtes Assoziativgesetz:
$(\lambda\vec{a}) \circ \vec{b} = |\lambda\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$ gilt nach Definition, wobei hier φ der Winkel zwischen $\lambda\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist

Hier müssen wir drei Möglichkeiten unterscheiden:

1) $\lambda > 0$: Dann ist $|\lambda\vec{a}| = \lambda|\vec{a}|$; weil außerdem $\lambda\vec{a}$ und $\vec{a}$ in dieselbe Richtung zeigen, schließen $\lambda\vec{a}$ und $\vec{a}$ mit $\vec{b}$ denselben Winkel φ ein. Damit folgt

$$|\lambda\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi = \lambda|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi = \lambda\left(|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi\right);$$

da alle Faktoren hier einfach Zahlen sind, kann das normale Assoziativgesetz verwendet werden. Also gilt insgesamt: $(\lambda\vec{a}) \circ \vec{b} = \lambda(\vec{a} \circ \vec{b}$

2) $\lambda = 0$: Dann ist $\lambda\left(\vec{a} \circ \vec{b}\right) = 0$ und außerdem auch $(\lambda\vec{a}) \circ \vec{b} = \vec{0} \circ \vec{b} = |\vec{0}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi = 0$; also folgt wieder $(\lambda\vec{a}) \circ \vec{b} = \lambda(\vec{a} \circ \vec{b})$.

3) $\lambda < 0$: Dann ist $|\lambda\vec{a}| = -\lambda|\vec{a}|$, da ja der Betrag des Vektors positiv sein muss. Weil außerdem $\lambda\vec{a}$ und $\vec{a}$ nun in entgegengesetzte Richtungen zeigen, schließt $\lambda\vec{a}$ mit $\vec{b}$ den Winkel $180° - \varphi$ ein; insgesamt gilt also: $(\lambda\vec{a}) \circ \vec{b} = -\lambda|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(180° - \varphi)$. Es gilt aber immer $\cos(180° - \varphi) = -\cos(\varphi)$, also folgt $(\lambda\vec{a}) \circ \vec{b} = \lambda|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi) = \lambda\left(|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi\right)$ und damit schließlich wieder $(\lambda\vec{a}) \circ \vec{b} = \lambda(\vec{a} \circ \vec{b})$.

Distributivgesetz:
Hier betrachten wir zunächst den Spezialfall, dass $\vec{b}$ und $\vec{c}$ beide parallel zu $\vec{a}$ sind. Außerdem beschränken wir uns auf den Fall, dass alle drei in dieselbe Richtung zeigen. (Falls einer oder zwei die entgegengesetzte Richtung haben, ist das Argument ähnlich, man braucht nur noch ein paar zusätzliche Minuszeichen und Winkel von 180°, ähnlich der Argumentation im Fall (3) beim Assoziativgesetz.) Dann schließen $\vec{b}$, $\vec{c}$ und auch $\vec{b} + \vec{c}$ alle jeweils den Winkel 0° mit $\vec{a}$ ein, also gilt einfach $\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$, $\vec{a} \circ \vec{c} = |\vec{a}| \cdot |\vec{c}|$ und auch $\vec{a} \circ (\vec{b} + \vec{c}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b} + \vec{c}|$ (wegen $\cos(0°) = 1$). Außerdem ist dann $|\vec{b} + \vec{c}| = |\vec{b}| + |\vec{c}|$; damit folgt insgesamt: $\vec{a} \circ \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b} + \vec{c}| = \vec{a} \circ (\vec{b} + \vec{c}) = |\vec{a}| \cdot (|\vec{b}| + |\vec{c}|)$. Die Beträge der Vektoren sind alle einfach Zahlen, also kann hier das normale Distributivgesetz verwendet werden, und wir erhalten $\vec{a} \circ \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| + |\vec{a}| \cdot |\vec{c}| = \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \circ \vec{c}$ für Vektoren, die alle dieselbe Richtung haben. (*)

Nun der allgemeine Fall beliebiger Richtungen. Jeden Vektor kann man als Summe eines Vektors parallel zu $\vec{a}$ und eines Vektors senkrecht dazu schreiben: $\vec{b} = \vec{b}_{\parallel} + \vec{b}_{\perp}$, $\vec{c} = \vec{c}_{\parallel} + \vec{c}_{\perp}$. Aus der Definition des Skalarprodukts folgt, dass für das Ergebnis des Skalarprodukts eines Vektors mit $\vec{a}$ immer nur der Teil parallel zu $\vec{a}$ wesentlich ist: $\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{a} \circ \overrightarrow{b_{\parallel}}$ und $\vec{a} \circ \vec{c} = \vec{a} \circ \overrightarrow{c_{\parallel}}$.

Außerdem ist offensichtlich: Wenn man zwei Vektoren derselben Richtung addiert, erhält man wieder einen Vektor derselben Richtung. Wenn wir also den Vektor $\vec{b} + \vec{c}$ mit $\vec{d}$ abkürzen, dann gilt sicher für die Anteile von $\vec{d}$ parallel zu $\vec{a}$ und senkrecht zu $\vec{a}$: $\overrightarrow{d_{\parallel}} = \overrightarrow{b_{\parallel}} + \overrightarrow{c_{\parallel}}$ und $\vec{d}_{\perp} = \vec{b}_{\perp} + \vec{c}_{\perp}$, und außerdem gilt wieder auch $\vec{a} \circ \vec{d} = \vec{a} \circ \overrightarrow{d_{\parallel}}$. Damit folgt insgesamt: $\vec{a} \circ \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \circ \vec{d} = \vec{a} \circ \overrightarrow{d_{\parallel}} = \vec{a} \circ (\overrightarrow{b_{\parallel}} + \overrightarrow{c_{\parallel}})$.

Weil nun alle Vektoren dieselbe Richtung haben, können wir aber wieder unser Ergebnis (*) für den Spezialfall verwenden. Damit folgt: $\vec{a} \circ \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \circ \overrightarrow{b_{\parallel}} + \vec{a} \circ \overrightarrow{c_{\parallel}} = \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \circ \vec{c}$.