

# Das Skalarprodukt

Beispiel:

Sie kaufen für eine Party 10 Flaschen Cola zu je 1,80 €, 20 Flaschen Bier zu je 0,70 € und 3 Flaschen Wodka zu je 8 €. Wie viel geben Sie insgesamt aus?

Zur Abkürzung kann man die gekauften Mengen in einem „Mengenvektor“  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 3 \end{pmatrix}$  und die

Preise in einem „Preisvektor“  $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,80 \\ 0,70 \\ 8 \end{pmatrix}$  zusammenfassen. Die gesamten Kosten errechnen sich

dann allgemein mit:

Dies schreibt man abkürzend als das sogenannte Skalarprodukt (auch: Punktprodukt oder inneres Produkt) der beiden Vektoren; ein übliches Rechenzeichen dafür ist  $\circ$ , also:

$$\vec{a} \circ \vec{b} =$$

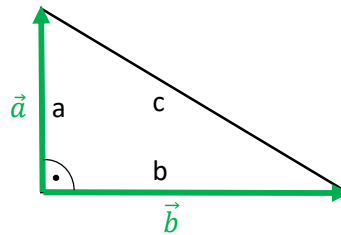
Das Skalarprodukt zweier Vektoren ergibt also immer einen Skalar (eine einzelne Zahl), keinen Vektor!

Rechenregeln:

- 1)  $\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{a}$  (Kommutativgesetz)
- 2)  $(k \cdot \vec{a}) \circ \vec{b} = k \cdot (\vec{a} \circ \vec{b})$  (gemischtes Assoziativgesetz; Vorsicht: Der Malpunkt  $\cdot$  bezeichnet hier zwei verschiedene Arten von Produkt! Eigentlich:  $(k \odot \vec{a}) \circ \vec{b} = k \cdot (\vec{a} \circ \vec{b})$ )
- 3)  $\vec{a} \circ (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \circ \vec{c}$  (Distributivgesetz)
- 4)  $\vec{a} \circ \vec{a} =$

Geometrische Bedeutung:

Betrachte ein rechtwinkliges Dreieck:



In diesem gilt bekanntlich der Satz des Pythagoras:

Das kann man aber auch mit den eingezeichneten Vektoren schreiben:

Es folgt:  $\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b}$

Betrachte außerdem noch Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ , die beide in dieselbe Richtung zeigen. Dann kann man beide als Vielfache desselben Einheitsvektors  $\vec{e}^0$  schreiben:

$$\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{e}^0; \quad \vec{b} = |\vec{b}| \cdot \vec{e}^0,$$

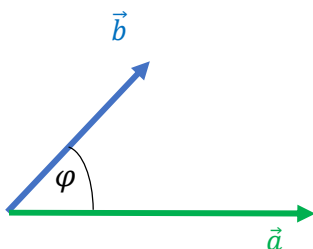
und damit folgt für ihr Skalarprodukt:

$$\vec{a} \circ \vec{b} =$$

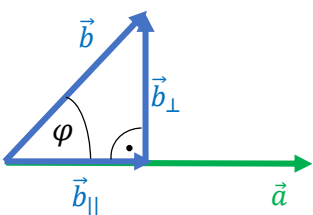
also letztlich einfach

$$\vec{a} \circ \vec{b} =$$

Betrachte dann Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ , die einen beliebigen Winkel  $\varphi$  (zwischen  $0^\circ$  und  $90^\circ$ ) miteinander einschließen:



Den Vektor  $\vec{b}$  kann man aber immer zerlegen in zwei Teilvektoren:  $\vec{b} = \vec{b}_{||} + \vec{b}_{\perp}$ , wobei  $\vec{b}_{||}$  parallel zu  $\vec{a}$  ist und  $\vec{b}_{\perp}$  senkrecht zu  $\vec{a}$ :



Dann folgt mit dem Distributivgesetz:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{a} \circ (\vec{b}_{||} + \vec{b}_{\perp}) =$$

Weil  $\vec{b}_{\perp}$  nach Konstruktion senkrecht zu  $\vec{a}$  ist, gilt aber  $\vec{a} \circ \vec{b}_{\perp} =$  . Weil außerdem  $\vec{b}_{||}$  parallel zu  $\vec{a}$  ist, gilt  $\vec{a} \circ \vec{b}_{||} =$  . Also bleibt nur:

$$\vec{a} \circ \vec{b} =$$

Die Länge von  $\vec{b}_{||}$  können wir schließlich im rechtwinkligen Dreieck oben mit Trigonometrie bestimmen:

$$|\vec{b}_{||}| =$$

und damit folgt dann schließlich

$$\vec{a} \circ \vec{b} =$$

bzw. umgestellt

$$\boxed{\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}}$$

Für Winkel  $> 90^\circ$  läuft die Argumentation prinzipiell ähnlich, das sparen wir uns hier.