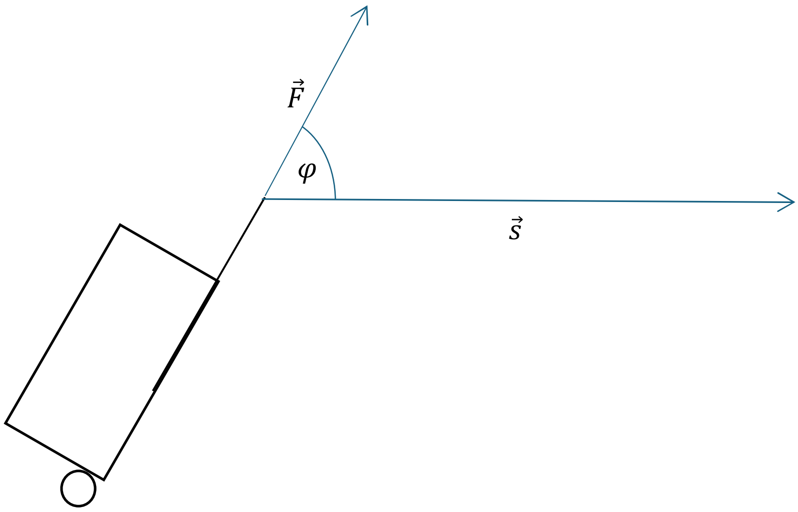
Das Skalarprodukt

a) Begriff und Rechengesetze

Beispiel: Trolley ziehen



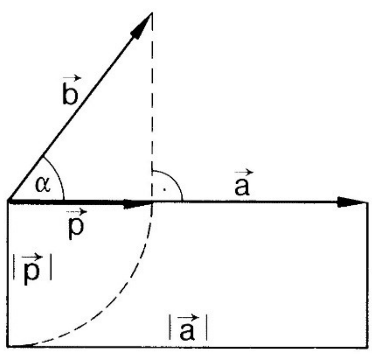
nötige Arbeit:

Definition: Das Skalarprodukt (auch Punktprodukt, inneres Produkt) zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist das Produkt aus den der beiden Vektoren und dem des Winkels, den beide einschließen: $\vec{a} \circ \vec{b} =$ (bzw. in Worten: Länge von $\vec{a}$ mal Länge des Teils von $\vec{b}$, der in Richtung von $\vec{a}$ zeigt)

Das Ergebnis ist also eine Zahl (ein Skalar), kein Vektor!
Anmerkung: Andere Bücher verwenden statt $\circ$ oft ein anderes Rechenzeichen!

Rechengesetze:

- $\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{a}$ (Kommutativgesetz)
- $\lambda(\vec{a} \circ \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \circ \vec{b}$ („gemischtes" Assoziativgesetz; Vorsicht: verschiedene Produkte; eigentlich $\lambda \cdot (\vec{a} \circ \vec{b}) = (\lambda \odot \vec{a}) \circ \vec{b}$).
- $\vec{a} \circ (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \circ \vec{c}$ (Distributivgesetz; Vorsicht: verschiedene Summen; eigentlich $\vec{a} \circ (\vec{b} \oplus \vec{c}) = \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \circ \vec{c}$)
- geometrische Interpretation: ergibt die Komponente des Vektors $\vec{b}$ in Richtung des Vektors $\vec{a}$ (in der Skizze unten mit $|\vec{p}|$ bezeichnet; durch das Skalarprodukt wird der Vektor $\vec{b}$ also auf den Vektor $\vec{a}$ „projiziert"); damit ergibt den Flächeninhalt des Rechtecks mit den Seitenlängen $|\vec{p}|$ und $|\vec{a}|$:



b) Berechnung aus den Komponenten

Besonders einfach ist die Berechnung, wenn einer der Vektoren in Richtung einer der Koordinatenachsen zeigt, z. B. wenn $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist – denn wir benötigen ja nur den Anteil von $\vec{b}$, der in Richtung von $\vec{a}$ zeigt, d. h. für einen beliebigen Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ benötigen wir hier nur den Anteil $\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$. Also ist hier einfach

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} = \qquad\qquad ;$$

genauso folgt $\begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \vec{b} =$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \vec{b} =$. *(Eigentlich müsste man hier noch mit den Vorzeichen etwas genauer aufpassen…)*

Andererseits kann man jeden Vektor $\vec{a}$ als Summe von Vektoren schreiben, die in Richtung der Koordinatenachsen zeigen, $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_3 \end{pmatrix}$. Mit dem Distributivgesetz folgt dann

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_3 \end{pmatrix} \right) \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \vec{b} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \vec{b} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \vec{b},$$

also letztlich $\boxed{\vec{a} \circ \vec{b} = \qquad\qquad\qquad}$ *(FS S. 8)*

c) Anwendungen

- für konstante Kraft: W = $\vec{F} \circ \vec{s}$ (= $F_1s_1 + F_2s_2 + F_3s_3$)
- Winkel zwischen zwei Vektoren: Formel aus Definition umstellen ➔ cos φ = *(FS S. 8)*
- speziell: $\vec{a} \perp \vec{b}$ ➔ $\vec{a} \circ \vec{b} = 0$ ➔ $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$ *(FS S. 8)*
- Normalenvektor zu zwei gegebenen Vektoren