Die Sinusfunktion als ein „unendliches Polynom"

Erinnere: Die Funktionsterme von ganzrationalen Funktionen (Polynomen) kann man auf zwei Arten schreiben – entweder als Summe oder als Linearfaktorzerlegung. Z. B. bei einer Funktion vom Grad 3: $f(x) = 0{,}5x^3 + x^2 - 0{,}5x - 1 = 0{,}5\,(x - 1)\,(x + 1)\,(x + 2)$.

Die Sinusfunktion ist offensichtlich nicht ganzrational (sieht man schon daran, dass ganzrationale Funktionen ja nie periodisch sind). Man kann aber versuchen, sie durch eine ganzrationale Funktion (beliebig genau) anzunähern.

Dafür gibt es wieder zwei Möglichkeiten – eine Summe oder eine Linearfaktorzerlegung.

1) Zunächst könnte man auf die Idee kommen, eine ganzrationale Funktion zu verwenden, die mit der Sinusfunktion und möglichst vieler ihrer Ableitungen übereinstimmt. Da der Graph der Sinusfunktion symmetrisch zum Ursprung ist, darf der ganzrational Funktionsterm nur Summanden mit ungeraden Exponenten enthalten. Weil wir letztlich beliebig hohe Exponenten haben wollen, fangen wir (anders als sonst) hier mit der kleinsten Potenz an, also 1:

$$f(x) = ax + bx^3 + cx^5 + dx^7 + \cdots$$

Die Ableitungen hiervon sind:

$$f'(x) = a + 3bx^2 + 5cx^4 + 7dx^6 + \cdots$$
$$f''(x) = 6bx + 20cx^3 + 42dx^5 + \cdots$$
$$f'''(x) = 6b + 60cx^2 + 210dx^4 + \cdots$$
$$f^{(4)}(x) = 120cx + 840dx^3 + \cdots$$
$$f^{(5)}(x) = 120c + 2520dx^2 + \cdots$$
$$f^{(6)}(x) = 5040dx + \cdots$$
$$f^{(7)}(x) = 5040d + \cdots,$$

also ist $f(0) = 0, f'(0) = a, f''(0) = 0, f'''(0) = 6b, f^{(4)}(0) = 0,$
$f^{(5)}(0) = 120c, f^{(6)}(0) = 0, f^{(7)}(0) = 5040d.$

Die Ableitungen der Sinusfunktion sind dagegen

$$\sin'(x) = \cos(x), \sin''(x) = -\sin(x), \sin'''(x) = -\cos(x), \sin^{(4)}(x) = \sin(x),\ \sin^{(5)}(x) = \cos(x), \sin^{(6)}(x) = -\sin(x), \sin^{(7)}(x) = -\cos(x),$$

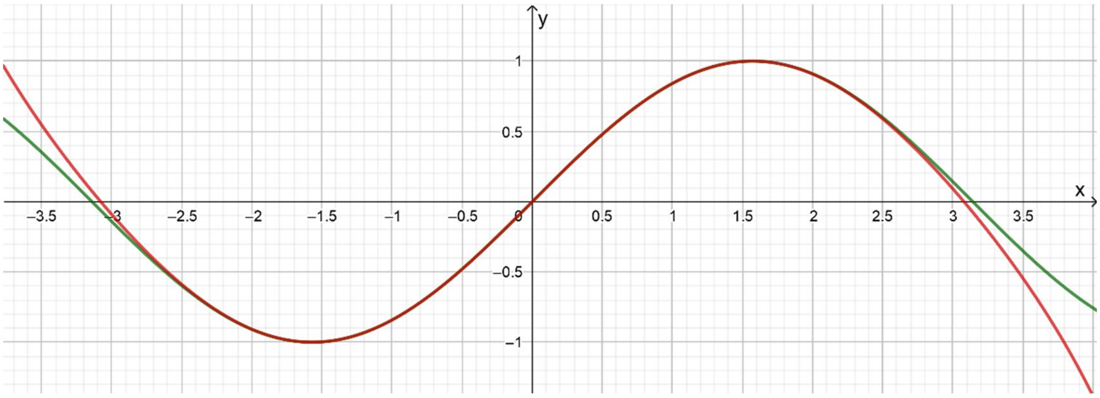
also ist $\sin(0) = 0, \sin'(0) = 1, \sin''(0) = 0, \sin'''(0) = -1, \sin^{(4)}(0) = 0,\ \sin^{(5)}(0) = 1, \sin^{(6)}(0) = 0, \sin^{(7)}(0) = -1.$

Vergleicht man beides, so sieht man, dass gelten muss: $a = 1 = \frac{1}{1}, b = -\frac{1}{6} = -\frac{1}{3\cdot2\cdot1}, c = \frac{1}{120} = \frac{1}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}, d = -\frac{1}{5040} = -\frac{1}{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}$, das heißt wir haben letztlich

$$\boxed{\sin(x) = x - \frac{1}{3\cdot2\cdot1}x^3 + \frac{1}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}x^5 - \frac{1}{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}x^7 + \cdots} \quad \text{(I)}$$

Es sollte klar sein, wie es weiter geht (bis ins Unendliche): Das Vorzeichen der Summanden wechselt immer ab zwischen + und –, und im Nenner der Brüche steht immer das Produkt aller Zahlen vom jeweiligen Exponenten bis zu 1. (Das kürzt man übrigens auch mit einem Ausrufezeichen ab, z. B. $7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 7!$, und bezeichnet dies als „Fakultät". Insgesamt nennt man so eine Darstellung einer Funktion als „unendliches Polynom", wobei alle Ableitungen übereinstimmen, auch eine „Taylorreihe".)

Auf der nächsten Seite sind der Graph der Sinusfunktion (grün) und der Graph des Polynoms siebten Grades (rot) aus (I) gezeigt. Man sieht, dass die Graphen im Bereich $[-2\pi; 2\pi]$ schon gut übereinstimmen. Wenn man noch mehr höhere Potenzen dazu nimmt, dann wird diese Übereinstimmung noch besser und gilt auch in immer größeren Intervallen.



2) Oder man versucht, die Sinusfunktion als Linearfaktorzerlegung zu schreiben, denn man kennt ja alle ihre Nullstellen und weiß, dass diese alle einfach sind: $x_k = k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$, also $0, \pi, -\pi, 2\pi, -2\pi, 3\pi, -3\pi, \ldots$. Also sollte gelten:

$$\sin(x) = a \cdot x \cdot (x-\pi) \cdot (x+\pi) \cdot (x-2\pi) \cdot (x+2\pi) \cdot (x-3\pi) \cdot (x+3\pi) \cdot \ldots$$

mit einem noch unbekannten Leitkoeffizienten a. Wenn man das ausmultiplizieren würde, dann hätte man ganz vorne x^∞, weil es ja unendlich viele Faktoren sind. Deshalb ist es günstiger, aus jeder Klammer jeweils die Nullstelle und ein passendes Vorzeichen auszuklammern, um damit die Reihenfolge der Faktoren umzustellen, also

$$\sin(x) = a \cdot x \cdot (-\pi) \cdot \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \cdot \pi \cdot \left(1 + \frac{x}{\pi}\right) \cdot (-2\pi) \cdot \left(1 - \frac{x}{2\pi}\right) \cdot 2\pi \cdot \left(1 + \frac{x}{2\pi}\right) \cdot (-3\pi) \cdot \left(1 - \frac{x}{3\pi}\right) \cdot 3\pi \cdot \left(1 + \frac{x}{3\pi}\right) \cdot \ldots$$

Multipliziert man jetzt alle Klammern aus, so erhält man als führenden Summanden den mit x,

$$\sin(x) = a \cdot x \cdot (-\pi) \cdot \pi \cdot (-2\pi) \cdot 2\pi \cdot (-3\pi) \cdot 3\pi \cdot \ldots + \cdots$$

Aus (I) wissen wir ja aber schon, dass der Summand mit x als Koeffizient einfach nur die 1 haben darf. Wir müssen also a so wählen, dass die ganzen Faktoren mit π alle herausgekürzt werden. Deshalb bleibt letztlich nur

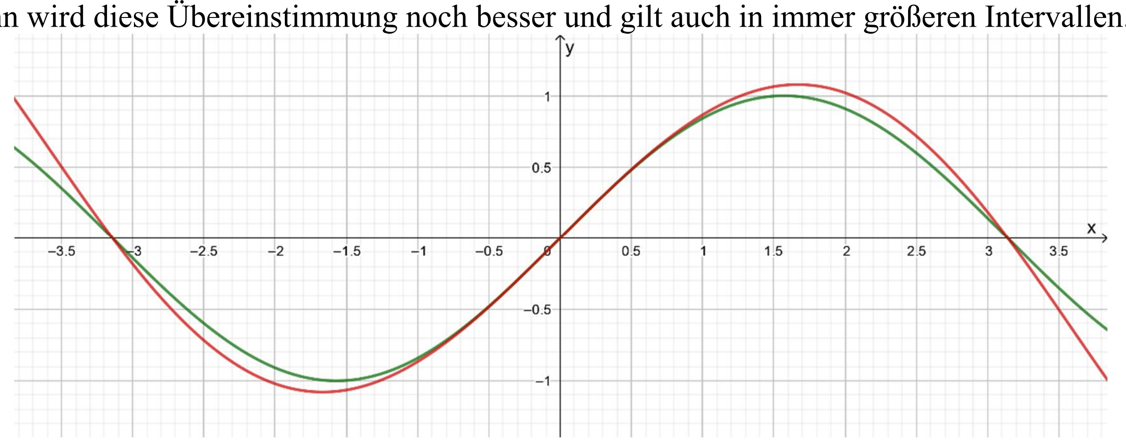
$$\sin(x) = x \cdot \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \cdot \left(1 + \frac{x}{\pi}\right) \cdot \left(1 - \frac{x}{2\pi}\right) \cdot \left(1 + \frac{x}{2\pi}\right) \cdot \left(1 - \frac{x}{3\pi}\right) \cdot \left(1 + \frac{x}{3\pi}\right) \cdot \ldots$$

Außerdem sollte noch auffallen, dass man jeweils zwei Faktoren mit der dritten binomischen Formel zusammenfassen kann,

$$\boxed{\sin(x) = x \cdot \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{(2\pi)^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{(3\pi)^2}\right) \cdot \ldots} \quad \text{(II)}$$

Es sollte klar sein, wie das Produkt weitergeht – bis ins Unendliche.

Vergleichen wir wieder die Graphen (wieder in grün: Sinus; in rot diesmal: (II) mit allen gezeigten Faktoren), so sehen wir wieder, dass wir im Bereich $[-2\pi; 2\pi]$ eine halbwegs gute Übereinstimmung haben. Wieder gilt: Wenn man noch mehr Linearfaktororen dazu nimmt, dann wird diese Übereinstimmung noch besser und gilt auch in immer größeren Intervallen.



Mithilfe der bisherigen Ergebnisse können wir nun gleich zwei interessante Formeln finden, mit denen man π berechnen kann.

1) Das Wallis-Produkt

Die Formel (II) sollte für jeden x-Wert gelten. Setzen wir insbesondere $x = \frac{\pi}{2}$ ein, so erhalten wir:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \cdot \left(1 - \frac{\pi^2/4}{\pi^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{\pi^2/4}{(2\pi)^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{\pi^2/4}{(3\pi)^2}\right) \cdot \dots$$

Links ergibt sich natürlich einfach 1, und die Brüche rechts können wir vereinfachen:

$$1 = \frac{\pi}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{16}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{36}\right) \cdot \dots = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{15}{16} \cdot \frac{35}{36} \cdot \dots$$

Bringen wir die Brüche nun auf die andere Seite (jeweils mit dem Kehrbruch multiplizieren), dann haben wir eine Darstellung von π/2 als ein „unendliches Produkt‘‘ von Brüchen:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{16}{15} \cdot \frac{36}{35} \cdot \dots$$

Die Zahlen oben sind alle Quadrate von geraden Zahlen. Die Zahlen unten können wir dagegen jeweils als Produkte von ungeraden Zahlen schreiben. Damit kommen wir zu einer Darstellung, aus der klar ersichtlich ist, wie die Produkte in Zähler und Nenner jeweils weiter gehen,

$$\boxed{\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \dots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots}}$$

Diese Darstellung von π wurde in sehr ähnlicher Form (aber mit komplett anderen Methoden) bereits um 1655 vom englischen Mathematiker John Wallis (1616–1703) entdeckt und heißt deshalb das „Wallis-Produkt‘‘.

2) Das „Basler Problem‘‘ und Eulers Lösung

Mitte des 17. Jahrhunderts beschäftigte sich der italienische Mathematiker Pietro Mengoli (1626-1686) mit unendlichen Summen und bewies dazu einige interessante Ergebnisse. An der relativ einfachen aussehenden Summe

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$$

scheiterte er jedoch im Jahre 1644. Weil sich in den nächsten Jahrzehnten vor allem Mathematiker in Basel mit dieser Summe beschäftigten, wurde dies als das „Basler Problem‘‘ bekannt. Erst 1735 wurde es durch den schweizerischen Mathematiker Leonhard Euler gelöst (1707-1783; einer der berühmtesten Mathematiker aller Zeiten, nach ihm ist auch die sehr wichtige „Euler’sche Zahl‘‘ benannt). Dazu verwendete er im Prinzip genau unsere Ergebnisse (I) und (II) von oben.

Euler überlegte sich, was der *zweite* Summand sein müsste, wenn man in (II) alle Klammern ausmultiplizieren würde. Der zweite Summand müsste x in der dritten Potenz enthalten. Ganz vorne steht schon ein x, also darf man aus jeweils einer Klammer jeweils den Summanden mit dem x^2 nehmen, aus allen anderen Klammern jeweils nur die Eins, damit man insgesamt x^3 erhält. Nimmt man das x^2 aus der ersten Klammer, aus allen anderen Klammern jeweils die 1, dann ergibt sich $-\frac{x^3}{\pi^2}$. Nimmt man das x^2 aus der zweiten Klammer, aus allen anderen Klammern jeweils die 1, dann ergibt sich $-\frac{x^3}{(2\pi)^2}$ usw. Wie üblich, wenn man Klammern ausmultipliziert, müssen die Ergebnisse alle addiert werden. Also erhalten wir:

$$\sin(x) = x \cdot \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{(2\pi)^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{(3\pi)^2}\right) \cdot \dots = x - \frac{x^3}{\pi^2} - \frac{x^3}{(2\pi)^2} - \frac{x^3}{(3\pi)^2} - \dots$$

$$= x - \left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{(2\pi)^2} + \frac{1}{(3\pi)^2} + \dots\right) x^3 + \dots$$

In (I) hatten wir als Koeffizienten von x^3 aber einfach nur $-\frac{1}{6}$. Damit die beiden Ergebnisse übereinstimmen, muss also gelten:

$$-\left(\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{(2\pi)^2}+\frac{1}{(3\pi)^2}+\ldots\right)=-\frac{1}{6}$$

Multiplizieren wir beide Seiten dieser Gleichung mit $-6\pi^2$, so haben wir also das Basler Problem gelöst – mit dem überraschenden Ergebnis

$$\boxed{\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}.}$$

Euler löste übrigens noch viele weitere Probleme dieser Art, zum Beispiel fand er allgemeine Ergebnisse für Summen dieser Art, bei denen im Nenner nicht das Quadrat steht, sondern irgendein positiver gerader Exponent. Allgemeine Formeln für Summen dieser Art, bei denen im Nenner ein *ungerader* positiver Exponent steht, sind allerdings bis heute immer noch nicht bekannt! Auch nichtganzzahlige Exponenten sind möglich; allgemein spricht man hier von der „Riemann'schen Zetafunktion", nach dem deutschen Mathematiker Bernhard Riemann (1826-1866), der dies erstmals systematisch untersuchte,

$$\zeta(s)=\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{5^s}+\cdots$$

Die „Riemann'sche Vermutung", in der es um die Nullstellen dieser Funktion geht (bzw. eigentlich ihrer Fortsetzung auf komplexe Zahlen), ist bis heute unbewiesen. Sie gehört zu den „Milleniums-Problemen" in der Mathematik, auf ihre Lösung ist ein Preisgeld von 1 Million US-Dollar ausgesetzt. Machen Sie mal.

Eulers Herleitung war übrigens mathematisch alles andere als sauber… im Umgang mit unendlichen Summen und Produkten kann viel schief gehen, und letztlich war es Glück, dass es hier klappt. Siehe dazu beispielsweise dieses Video, in dem die Herleitung von oben auch nochmal vorgemacht wird:
https://www.youtube.com/watch?v=od9lUVypXrQ