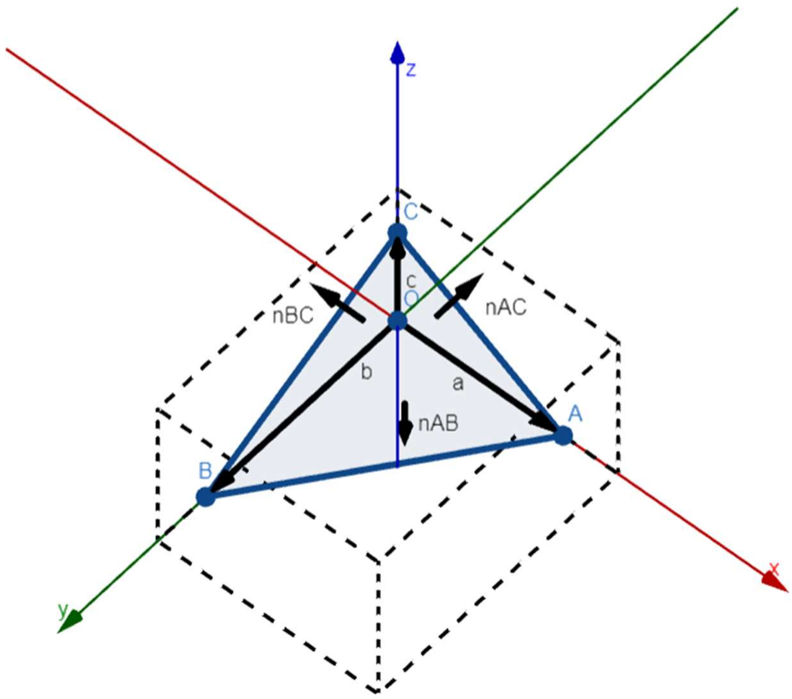
Eine dreidimensionale Verallgemeinerung zum Satz von Pythagoras:

Der Satz von de Gua

Bevor wir den Satz aufstellen, überlegen wir uns erst mal, welche geometrische Form wir dafür brauchen. Der Satz von Pythagoras gilt ja für rechtwinklige Dreiecke, und das sind natürlich zweidimensionale Formen. Eine dreidimensionale Verallgemeinerung eines Dreiecks ist eine Pyramide (beides sind Formen mit einer Spitze); also schauen wir uns mal dreiseitige Pyramiden an. Wie beim Satz von Pythagoras sollte irgendwo an der Spitze ein rechter Winkel sein. Wir können sogar spezieller fordern, dass alle drei Winkel an der Spitze rechte Winkel sind. Halbwegs anschaulich vorstellen kann man sich eine solche Pyramide, indem man sich erst mal einen Quader vorstellt und von dem dann eine Ecke schräg abschneidet:



Die dreiseitige Pyramide ABCO hat bei der Spitze O nun in der Tat drei rechte Winkel.

Den Dreiecks-Seitenkanten a, b, c im Satz von Pythagoras entsprechen nun die Pyramiden-Seiten*flächen* OAB, OAC, OBC, ABC. In Analogie zum Satz von Pythagoras sollte also nun für die Flächeninhalte gelten:

$$\boxed{F_{OAB}^2 + F_{OAC}^2 + F_{OBC}^2 = F_{ABC}^2}$$

Mithilfe von Vektor- und Skalarprodukt ist das auch schnell zu beweisen: Für die Flächeninhalte der drei Seitenflächen gilt mit den oben eingezeichneten Vektoren zunächst

$$F_{OAB} = \frac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{n_{AB}}\right|; \quad F_{OAC} = \frac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{c}\right| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{n_{AC}}\right|; \quad F_{OBC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{n_{BC}}\right|$$

mit den in der Zeichnung oben markierten Normalenvektoren $\overrightarrow{n_{BC}}, \overrightarrow{n_{AB}}, \overrightarrow{n_{AC}}$. Für die Grundseite gilt außerdem

$$F_{AB} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|(\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a})\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{b} \times \vec{c} - \vec{b} \times \vec{a} - \vec{a} \times \vec{c}\right| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{n_{BC}} - \overrightarrow{n_{AB}} - \overrightarrow{n_{AC}}\right|$$

Berechnen wir nun das Quadrat dieses Flächeninhalts:

$$F_{ABC}^2 = \left(\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{n_{BC}} - \overrightarrow{n_{AB}} - \overrightarrow{n_{AC}}\right)\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{n_{BC}} - \overrightarrow{n_{AB}} - \overrightarrow{n_{AC}}\right) \circ \left(\overrightarrow{n_{BC}} - \overrightarrow{n_{AB}} - \overrightarrow{n_{AC}}\right).$$

Wenn wir die Klammern ausmultiplizieren, ergibt das erst mal einen sehr länglichen Ausdruck:

$$F_{ABC}^2 = \cdots = \frac{1}{4}\overrightarrow{n_{BC}}^2 + \frac{1}{4}\overrightarrow{n_{AB}}^2 + \frac{1}{4}\overrightarrow{n_{AC}}^2 - \frac{1}{2}\overrightarrow{n_{BC}} \circ \overrightarrow{n_{AB}} - \frac{1}{2}\overrightarrow{n_{BC}} \circ \overrightarrow{n_{AC}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{n_{AB}} \circ \overrightarrow{n_{AC}}.$$

Die ersten drei Summanden sind nun aber genau wieder die Quadrate der Flächeninhalte der drei Seitenflächen – und die folgenden drei Summanden sind alle gleich Null, weil die drei Normalenvektoren $\overrightarrow{n_{BC}}, \overrightarrow{n_{AB}}, \overrightarrow{n_{AC}}$ alle jeweils senkrecht aufeinander stehen (siehe Zeichnung)! Also bleibt am Schluss tatsächlich

$$F_{ABC}^2 = F_{OA}^2 \quad + F_{OAC}^2 + F_{OBC}^2,$$

was zu beweisen war.

Der Satz ist nach dem französischen Geistlichen, Enzyklopädisten und Mathematikeren Jean Paul de Gua de Malves (1713–1785) benannt, der ihn 1783 veröffentlichte. (Der Satz wurde allerdings zur selben Zeit in einer etwas allgemeineren Form auch von dem französischen Mathematiker Tinseau d'Amondans (1746–1818) veröffentlicht und war sogar schon viel früher René Descartes (1596–1650) und Johannes Faulhaber (1580–1635) bekannt gewesen – alles laut MathWorld, zitiert bei Wikipedia.)

Ich wurde auf den Satz aufmerksam durch dieses Video: https://www.youtube.com/watch?v=vcnQ0GR4IPI.

Darin wurde der Satz deutlich allerdings komplizierter bewiesen; der oben skizzierte Beweis findet sich in mehreren Kommentaren unter dem Video.