Sätze über ganzrationale Funktionen

1. Ist x_0 eine Nullstelle einer Funktion f vom Grad n, so kann man f schreiben als $f(x) = (x - x_0) \cdot g(x)$ mit einer Funktion g vom Grad n-1.

2. Die gesamte Anzahl der Nullstellen (Vielfachheiten mitgezählt) einer Funktion vom Grad n ist höchstens n. Wenn die Anzahl der Nullstellen genau n ist, so kann man den Funktionsterm darstellen als

$$f(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$$

3. Ist die Anzahl der Nullstellen (Vielfachheiten mitgezählt) kleiner als n, so kann man den Funktionsterm immerhin noch als ein Produkt aus linearen und quadratischen Faktoren schreiben.

4. Ist die Anzahl der Nullstellen gleich n, so gilt für die Koeffizienten: $a_0 = (-1)^n \cdot a_n \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$ und $a_{n-1} = -a_n \cdot (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$. (Verallgemeinerung des Satzes von Vieta)

5. Ist der Grad einer Funktion gerade, so kann sie eine beliebige Anzahl ($\leq n/2$) von Nullstellen gerader Vielfachheit haben und muss eine gerade Anzahl von Nullstellen ungerader Vielfachheit haben; die gesamte Anzahl der Nullstellen (Vielfachheiten mitgezählt) ist also gerade. Ist der Grad einer Funktion ungerade, so kann sie eine beliebige Anzahl ($\leq (n-1)/2$) von Nullstellen gerader Vielfachheit haben und muss eine ungerade Anzahl von Nullstellen ungerader Vielfachheit haben; die gesamte Anzahl der Nullstellen (Vielfachheiten mitgezählt) ist also ungerade.

6. Sind alle Koeffizienten a_i ganzzahlig und ist $a_0 \neq 0$, dann sind alle Nullstellen entweder Brüche $x = \frac{u}{v}$, bei denen u ein Teiler von a_0 ist und v ein Teiler von a_n, oder sie sind irrationale Zahlen. Folgerung: Ist insbesondere $a_n = 1$, dann sind alle Nullstellen entweder ganze Zahlen, die Teiler von a_0 sind, oder irrational.

7. a) Haben alle Koeffizienten dasselbe Vorzeichen, so können die Nullstellen nicht positiv sein. Ist außerdem $a_0 \neq 0$, so müssen die Nullstellen negativ sein. b) Wechseln die Koeffizienten dagegen immer wieder ihr Vorzeichen und ist kein Koeffizient gleich 0 (d.h. alle Koeffizienten zu ungeraden Potenzen sind positiv und alle Koeffizienten zu geraden Potenzen sind negativ – oder umgekehrt), dann müssen die Nullstellen positiv sein.
(Eine Erweiterung davon ist die **Vorzeichenregel von Descartes:** Die Anzahl der positiven Nullstellen einer ganzrationalen Funktion ist entweder gleich der Anzahl der Vorzeichenwechsel seiner Koeffizienten oder um eine gerade Zahl kleiner.)

Beweisen Sie dies!

Tipps:

1. Benutzen Sie die Polynomdivision und begründen Sie mittels der Bedingung $f(x_0) = 0$, dass dabei keine Zahl als Rest bleiben kann.

2. Benutzen Sie Satz 1.

3. Vergessen Sie's – außer, Sie sind ein absolutes Mathe-Genie... der Beweis ist einfach, wenn man den sogenannten „Fundamentalsatz der Algebra" benutzt – dafür braucht man aber vertiefte Kenntnisse über Funktionen von komplexen Zahlen, das geht **weit** über den Schulstoff hinaus. Es gibt auch einen Beweis, der ohne das alles auskommt („Beweis des sogenannten Fundamentalsatzes der Algebra im reellen Gebiete" von Ernst Mohr, erschienen 1942 im „Journal für die reine und angewandte Mathematik", Band 184) – wenn Sie den verstehen, dann erklären Sie ihn mir bitte... ;-)

4. Benutzen Sie die faktorisierte Form aus Satz 2 und multiplizieren Sie die Klammern aus.

5. Benutzen Sie das Verhalten von $f(x)$ für $x \to \pm\infty$ und überlegen Sie sich, wie viele Vorzeichenwechsel (VZW) jeweils nötig sind. Beachten Sie das Verhalten von f an Nullstellen gerader bzw. ungerader Vielfachheit.

6. Lösen Sie die Bedingung $f(u/v) = 0$ nach a_0 auf und multiplizieren Sie mit v^n; damit kann man zeigen, dass u ein Teiler von a_0 sein muss. Stellen Sie diese Gleichung danach so um, dass alle Koeffizienten außer a_n auf der rechten Seite stehen; damit kann man zeigen, dass v ein Teiler von a_n sein muss. Die Folgerung ergibt sich sehr leicht, wenn Sie berücksichtigen, durch welche Zahlen 1 teilbar ist.

7. a) Überlegen Sie sich das Vorzeichen von $f(x_0)$, wenn x_0 positiv ist. Unterscheiden Sie dabei die beiden Fälle „alle Koeffizienten positiv" und „alle Koeffizienten negativ".
b) Überlegen Sie sich das Vorzeichen von $f(x_0)$, wenn x_0 positiv ist. Unterscheiden Sie dabei die beiden Fälle „alle Koeffizienten positiv" und „alle Koeffizienten negativ". Alternativ: Betrachten Sie die Funktion $g(x) = f(-x)$; es gilt dann, dass man den Graphen von g erhält, indem man den Graphen von f an der y-Achse spiegelt. Überlegen Sie sich, was für die Koeffizienten von g folgt, und verwenden Sie das Ergebnis aus Teil (a).
(Der Beweis der Erweiterung ist *weit* schwieriger. Überlegen Sie sich dafür zunächst, dass es genügt, ganzrationale Funktionen zu betrachten, bei denen der Leitkoeffizient gleich 1 und das Absolutglied ungleich 0 ist. Dann begründen Sie, dass die Anzahl der Vorzeichenwechsel der Koeffizienten gerade ist, wenn das Absolutglied größer als 0 ist, und ungerade, wenn es kleiner als 0 ist. Anschließend begründen Sie, dass bei jeder Polynomdivision, die auf einer positiven Nullstelle beruht, das Vorzeichen des Absolutglieds wechselt, und damit dann, dass die Anzahl der positiven Nullstellen gerade ist, wenn das Absolutglied größer als 0 ist, und ungerade, wenn es kleiner als 0 ist. Abschließend müssen Sie noch begründen, dass bei einer Polynomdivision die Anzahl der Vorzeichenwechsel der Koeffizienten abnehmen muss, und damit dann, dass die Anzahl der positiven Nullstellen höchstens so groß ist wie die Anzahl der Vorzeichenwechsel der Koeffizienten.)

Beweise:

1. Wir definieren $g(x) = f(x) : (x - x_0)$. Die Division kann mit den üblichen Methoden (Polynomdivision) durchgeführt werden. In jedem einzelnen Schritt der Polynomdivision ergibt sich dabei sicher ein Vielfaches einer Potenz von x, in der Summe insgesamt also eine ganzrationale Funktion h, und diese ist sicher vom Grad n-1. Es könnte allerdings ein Rest r übrig bleiben, der dann natürlich auch durch $x - x_0$ geteilt wird:

$g(x) = f(x) : (x - x_0) = h(x) + \frac{r}{x - x_0}$, wobei h eine ganzrationale Funktion vom Grad n-1 ist

Diese Gleichung multiplizieren wir mit $(x - x_1)$; es ergibt sich:

$f(x) = g(x) \cdot (x - x_0) = h(x) \cdot (x - x_0) + r$

x_0 ist nach Voraussetzung aber eine Nullstelle von f, also $f(x_0) = 0$

$\Rightarrow h(x_0) \cdot (x_0 - x_0) + r = 0 \Rightarrow r = 0$

Damit bleibt: $g(x) = h(x)$, also ist g eine ganzrationale Funktion vom Grad n-1 q.e.d.

2. Ist x_1 eine Nullstelle von f und f vom Grad n, so ergibt sich laut Satz 1 nach der Polynomdivision $f(x) : (x - x_1)$ eine Funktion g vom Grad n-1. Ist x_2 eine Nullstelle von g, so ergibt sich laut Satz 1 nach der Polynomdivision $g(x) : (x - x_2)$ eine Funktion h vom Grad n-2. Dies kann man offensichtlich höchstens n-mal durchführen – dann hat man eine Funktion vom Grad 0, also eine Konstante, und diese kann offensichtlich keine weiteren Nullstellen haben. Also hat f höchstens n Nullstellen (Vielfachheiten mitgezählt).

f hat genau dann n Nullstellen, wenn f eine Nullstelle x_1 hat, g eine Nullstelle x_2 usw. Dann kann man schreiben: $f(x) = (x - x_1) \cdot g(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot h(x) = ... = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot ... \cdot (x - x_n) \cdot z$, wobei z eine Funktion vom Grad 0 ist, also eine Konstante. Multipliziert man die Klammern aus und nimmt dabei nur die höchsten Potenzen von x mit, so ergibt sich daraus $f(x) = z \cdot x^n + ...$ Also ist $z = a_n$. q.e.d.

3. a_0 ist der Koeffizient zu x^0, also ohne x. Multipliziert man die Klammern in der faktorisierten Darstellung aus Satz 4 aus, so erhält man genau dann einen Term ohne x, wenn man aus allen Klammern jeweils nur das $-x_i$ mitnimmt. Insgesamt erhält man daraus das angegebene Ergebnis für a_0.

a_{n-1} ist der Koeffizient von x^{n-1}. Multipliziert man die Klammern in der faktorisierten Darstellung aus Satz 2 aus, so erhält man genau dann einen Term mit x^{n-1}, wenn man aus n-1 Klammern jeweils das x mitnimmt und aus der restlichen Klammer das $-x_i$; man erhält dann nämlich insgesamt $a_n \cdot x^{n-1} \cdot (-x_i)$. Addiert man alle diese Terme auf, so ergibt sich das angegebene Ergebnis für a_{n-1}.

4.

Fall 1: Grad gerade

Nach Satz 4 kann die gesamte Anzahl von Nullstellen (Vielfachheiten mitgezählt) höchstens n sein, also kann die Anzahl der Nullstellen mit gerader Vielfachheit (also mindestens Vielfachheit 2) höchstens n/2 sein. f wechselt von $-\infty$ nach $+\infty$ das VZ insgesamt nicht (für $x \to \pm\infty$ gilt entweder $f(x) \to +\infty$ oder $f(x) \to -\infty$), die gesamte Anzahl der VZW muss also gerade sein. An Nullstellen gerader Vielfachheit wechselt f ihr VZ nicht, also ist die Anzahl der Nullstellen gerader Vielfachheit ansonsten beliebig. An Nullstellen ungerader Vielfachheit wechselt f ihr VZ, also muss die Anzahl der Nullstellen mit ungerader Vielfachheit gerade sein. Eine beliebige Anzahl von Nullstellen gerader Vielfachheit plus eine gerade Anzahl von Nullstellen ungerader Vielfachheit ergibt insgesamt eine gerade Anzahl von Nullstellen (Vielfachheiten mitgezählt).

Fall 2: Grad ungerade

Nach Satz 4 kann die gesamte Anzahl von Nullstellen (Vielfachheiten mitgezählt) höchstens n sein, also kann die Anzahl der Nullstellen mit gerader Vielfachheit (also mindestens Vielfachheit 2) höchstens (n-1)/2 sein. f wechselt von $-\infty$ nach $+\infty$ das VZ insgesamt (es gilt entweder $f(x) \to -\infty$ für $x \to -\infty$ und $f(x) \to +\infty$ für $x \to +\infty$ oder $f(x) \to +\infty$ für $x \to -\infty$ und $f(x) \to -\infty$ für $x \to +\infty$), die gesamte Anzahl der VZW muss also ungerade sein. An Nullstellen gerader Vielfachheit wechselt f ihr VZ nicht, also ist die Anzahl der Nullstellen gerader Vielfachheit ansonsten beliebig. An Nullstellen ungerader Vielfachheit wechselt f ihr VZ, also muss die Anzahl der Nullstellen mit ungerader Vielfachheit ungerade sein. Eine beliebige Anzahl von Nullstellen gerader Vielfachheit plus eine ungerade Anzahl von Nullstellen ungerader Vielfachheit ergibt insgesamt eine ungerade Anzahl von Nullstellen (Vielfachheiten mitgezählt).

q.e.d

6. Zunächst kann man voraussetzen: Wenn es einen Bruch u/v gibt, der eine Nullstelle ist, dann kann man u und v so wählen, dass sie keine gemeinsamen Teiler haben (denn man kann ja jeden Bruch, bei dem Zähler und Nenner gemeinsame Teiler haben, kürzen).

$f\left(\frac{u}{v}\right) = 0 \Rightarrow a_n \left(\frac{u}{v}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{u}{v}\right)^{n-1} + \cdots + a_2\left(\frac{u}{v}\right)^2 + a_1\frac{u}{v} + a_0 = 0$

$\Rightarrow a_0 = -a_n\left(\frac{u}{v}\right)^n - a_{n-1}\left(\frac{u}{v}\right)^{n-1} - \cdots - a_2\left(\frac{u}{v}\right)^2 - a_1\frac{u}{v}$

$\Rightarrow a_0 \cdot v^n = -a_n \cdot u^n - a_{n-1} \cdot u^{n-1} \cdot v - \cdots - a_2 \cdot u^2 \cdot v^{n-2} - a_1 \cdot u \cdot v^{n-1}$

Da nach Voraussetzung alle Koeffizienten a_i ganzzahlig sind (und u und v natürlich auch als ganze Zahlen gewählt werden können, das geht ja bei jedem Bruch), folgt, dass jeder der Summanden rechts eine ganze Zahl ist, also die komplette rechte Seite eine ganze Zahl ist, also auch die komplette linke Seite. Jeder Summand rechts enthält außerdem mindestens einen Faktor u, also kann man das u ausklammern. In der Klammer bleibt dann wieder eine Summe von ganzen Zahlen, also insgesamt eine ganze Zahl. Also ist die komplette rechte Seite durch u teilbar, und somit muss auch die linke Seite $a_0 \cdot v^n$ durch u teilbar sein. Da aber nach der Vorbemerkung oben v eben nicht durch u teilbar ist, folgt, dass a_0 durch u teilbar sein muss.

Gleichung umstellen:

$a_n \cdot u^n = -a_{n-1} \cdot u^{n-1} \cdot v - \cdots - a_2 \cdot u^2 \cdot v^{n-2} - a_1 \cdot u \cdot v^{n-1} - a_0 \cdot v^n$

Nun kann man genauso argumentieren: Die komplette rechte Seite ist durch v teilbar, also muss auch die linke Seite $a_n \cdot u^n$ durch v teilbar sein. Da aber nach der Vorbemerkung oben u eben nicht durch v teilbar ist, folgt, dass a_n durch v teilbar sein muss.

Ist insbesondere $a_n = 1$, so kann ein Bruch u/v nur dann eine Nullstelle sein, wenn 1 durch v teilbar ist. 1 ist aber offensichlich nur durch ± 1 teilbar. Und Brüche, deren Nenner 1 oder –1 ist, sind offensichtlich gleich ganzen Zahlen.

q.e.d.

7.

(a) Wir nehmen an, dass x_0 positiv ist.

Fall 1: Alle Koeffizienten positiv. Dann ist $f(x_0) = a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \ldots + a_2 x_0^2 + a_1 x_0 + a_0$ sicher eine positive Zahl, da jeder einzelne Summand positiv ist. Also kann $f(x_0)$ nicht gleich 0 sein, also ist x_0 keine Nullstelle.

Fall 2: Alle Koeffizienten negativ. Dann ist $f(x_0) = a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \ldots + a_2 x_0^2 + a_1 x_0 + a_0$ sicher eine negative Zahl, da jeder einzelne Summand negativ ist. Also kann $f(x_0)$ nicht gleich 0 sein, also ist x_0 keine Nullstelle.

Es gilt immer: $f(0) = a_0$. Wenn also $a_0 \neq 0$ ist, dann kann $x_0 = 0$ keine Nullstelle sein. Die Nullstellen können dann also weder positiv sein noch gleich 0 – also müssen sie negativ sein.

(b) Wir nehmen an, dass x_0 negativ ist.

Fall 1: Der Grad ist gerade und der Leitkoeffizient ist positiv. Also können wir schreiben:

$$f(x) = a_n x^n - a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} - a_{n-3} x^{n-3} \ldots,$$

wobei alle $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3} \ldots$ positiv sind und n eben eine gerade Zahl ist. Dann sind aber x^n, x^{n-2} usw. alle gerade Potenzen einer negativen Zahl, also ergibt sich ein positives Ergebnis, und weil $a_n, a_{n-2}, \ldots$ positiv sind, folgt, dass dann auch $a_n x^n$, $a_{n-2} x^{n-2}, \ldots$ positiv sind. Andererseits sind x^{n-1}, x^{n-3} usw. alle ungerade Potenzen einer negativen Zahl, also ergibt sich ein negatives Ergebnis; weil aber $-a_{n-1}, -a_{n-3}, \ldots$ dann auch negativ sind, folgt, dass $-a_{n-1} x^{n-1}$, $-a_{n-3} x^{n-3}, \ldots$ alle positiv sind. Damit ist jeder einzelne Summand positiv, also ist $f(x_0)$ insgesamt positiv, also kann $f(x_0)$ nicht gleich 0 sein, also ist x_0 keine Nullstelle.

Alternativ: Wir spiegeln den Graphen von f an der y-Achse; dies erreichen wir dadurch, dass wir alle x-Werte jeweils durch –x ersetzen. Damit haben wir dann eine neue Funktion:

$$g(x) = f(-x) = a_n (-x)^n - a_{n-1} (-x)^{n-1} + a_{n-2} (-x)^{n-2} - a_{n-3} (-x)^{n-3} \ldots$$

Weil wir den Grad n als gerade vorausgesetzt hatten, ist nun aber $(-x)^n = x^n$, $(-x)^{n-2} = x^{n-2}$, … und außerdem $(-x)^{n-1} = -x^{n-1}$, $(-x)^{n-3} = -x^{n-3}$, … Also folgt insgesamt

$$g(x) = a_n x^n - a_{n-1} (-x^{n-1}) + a_{n-2} x^{n-2} - a_{n-3} (-x^{n-3}) \ldots = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + a_{n-3} x^{n-3} \ldots$$

Da vorausgesetzt wurde, dass alle a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3} … positiv sind, ist g nun eine Funktion, bei der alle Koeffizienten positiv sind (und kein Koeffizient gleich 0). Nach dem, was in (a) gezeigt wurde, hat g also nur negative Nullstellen. Wir hatten den Graphen von g aber erhalten, indem wir den Graphen von f an der y-Achse gespiegelt hatten. Wenn also g nur negative Nullstellen hat, dann erhalten wir durch Zurückspiegeln, dass die Funktion f nur positive Nullstellen haben kann.
Nun sind noch drei weitere Fälle zu betrachten: (2) Grad gerade, Leitkoeffizient negativ; (3) Grad ungerade, Leitkoeffizient positiv; (4) Grad ungerade, Leitkoeffizient negativ. Bei allen läuft die Argumentation aber immer prinzipiell gleich. q.e.d.

Nun noch der Beweis der Vorzeichenregel von Descartes, aufgeteilt auf mehrere Schritte.
a) Zunächst teilen wir den Funktionsterm durch den Leitkoeffizienten (falls dieser sowieso nicht schon gleich 1 ist); dies ändert weder die Anzahl der positiven Nullstellen noch die Anzahl der Vorzeichenwechsel der Koeffizienten. Ist das Absolutglied gleich 0, so teilen wir außerdem die Funktion durch so viele Potenzen von x, bis es ungleich 0 ist (auch das ändert weder die Anzahl der positiven Nullstellen noch die Anzahl der Vorzeichenwechsel der Koeffizienten). Wir betrachten also im Folgenden nur noch ganzrationale Funktionen f mit $a_n = 1$ und $a_0 \neq 0$.

b) f hat positive Nullstelle p ➔ bei der Polynomdivision $g(x) = f(x) : (x - p)$ ändert sich das Vorzeichen des Absolutglieds; außerdem hat g eine positive Nullstelle weniger als f; außerdem ist der LK von g auch gleich 1.

Die Anzahl der positiven Nullstellen sei m. Nach m Polynomdivisionen bleibt dann eine Funktion g übrig, die keine positiven Nullstellen hat; bei deren Funktionsterm muss dann das Absolutglied positiv sein. (Denn wenn es positiv wäre, müsste g noch eine positive Nullstelle haben, denn g(0) ist negativ, aber der LK ist +1, also geht g gegen +unendlich für x gegen +unendlich).

Außerdem ändert sich das Vorzeichen des Absolutglieds bei diesen Polynomdivisionen insgesamt um $(-1)^m$, also ist das Vorzeichen des Absolutglieds von f eben $(-1)^m$.

Es folgt: Wenn das Absolutglied von f positiv ist, dann ist die Anzahl m der positiven Nullstellen gerade; wenn es negativ ist, dann ist m ungerade.

c) Da $a_n = 1$ positiv ist, gilt: Wenn das Absolutglied von f positiv ist, dann ist die Anzahl der Vorzeichenwechsel der Koeffizienten von f gerade; wenn es negativ ist, dann ist diese Anzahl ungerade.

(b) und (c) gemeinsam implizieren: Die Anzahl der positiven Nullstellen von f und die Anzahl der Vorzeichenwechsel seiner Koeffizienten unterscheidet sich immer um eine gerade Zahl.

d) Wir schreiben nun $f(x) = x^n + \ldots + a_0 = (x^{n-1} + \ldots + b_0)(x - p)$ und betrachten die Multiplikation genauer. Ein Summand von f mit der Potenz x^m erhält jeweils zwei Beiträge aus dem Produkt:

$$(b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1})\,(x - p) = b_m x^{m+1} - p b_m x^m + b_{m-1} x^m - p b_{m-1} x^{m-1},$$

also ist $a_m = -p b_m + b_{m-1}$.

Haben nun b_m und b_{m-1} dasselbe Vorzeichen, so ist das VZ von a_m unklar – hier könnte also ein Vorzeichenwechsel der Koeffizienten von f stattfinden, muss aber nicht. Auch wenn einer der beiden oder gar beide gleich 0 sind, könnte hier ein Vorzeichenwechsel stattfinden, muss aber nicht.

Ist dagegen irgendwo zum ersten Mal $b_m > 0$ und $b_{m-1} < 0$, so folgt (wegen $p > 0$), dass $a_m < 0$ ist. Andererseits ist $a_n = 1 > 0$, also findet *spätestens (!)* hier beim Koeffizienten a_m findet der erste Vorzeichenwechsel der Koeffizienten von f statt. Ist irgendwo später dann $b_m < 0$ und $b_{m-1} > 0$ (dies muss später sein, da ja die Koeffizienten b_m bis zum ersten Vorzeichenwechsel alle positiv sind, weil ja $b_n = 1 > 0$ ist), so folgt $a_m > 0$, *spätestens* (!) hier hat man also wieder einen Vorzeichenwechsel der Koeffizienten von f.

Und so geht es weiter: Jeder VZW der Koeffizienten von g erzwingt einen VZW der Koeffizienten von f (dieser findet entweder an derselben Stelle statt oder sogar schon vorher), und damit folgt: Die Anzahl der VZW von f ist mindestens so groß wie die Anzahl der VZW von g.

e) Bei jeder Polynomdivision nimmt die Anzahl der positiven Nullstellen um 1 ab, außerdem nach (4) die Anzahl der Vorzeichenwechsel um mindestens 1. Nach m Polynomdivisionen landet man bei einem Polynom, das keine positiven Nullstellen mehr hat, aber immer noch Vorzeichenwechsel haben kann. Also ist die gesamte Anzahl der Vorzeichenwechsel mindestens m, also mindestens so groß wie die Anzahl der positiven Nullstellen. Damit kann die Anzahl der positiven Nullstellen nur gleich der Anzahl der Vorzeichenwechsel sein, oder eben um eine gerade Zahl kleiner. q.e.d.

René Descartes (1596–1650) hatte in seinem Werk „La Géometrié‘‘ (in dem es, wie der Name schon sagt, eigentlich vor allem um (Analytische) Geometrie ging) im Jahre 1637 eine sehr ähnliche Aussage gemacht, diese allerdings nicht bewiesen.
(nach http://www.cut-the-knot.org/fta/ROS2.shtml)