Sätze über ganzrationale Funktionen

1. Sind alle Koeffizienten a_i ganzzahlig und ist x_0 eine ganzzahlige Nullstelle, so ist x_0 ein Teiler von a_0.

2. Haben alle Koeffizienten dasselbe Vorzeichen, so können die Nullstellen nicht positiv sein. Ist außerdem $a_0 \neq 0$, so müssen die Nullstellen negativ sein.

3. Ist x_0 eine Nullstelle einer Funktion f vom Grad n, so kann man f schreiben als $f(x) = (x - x_0) \cdot g(x)$ mit einer Funktion g vom Grad n-1.

4. Die gesamte Anzahl der Nullstellen (Vielfachheiten mitgezählt) einer Funktion vom Grad n ist höchstens n. Wenn die Anzahl der Nullstellen genau n ist, so kann man den Funktionsterm darstellen als

$$f(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2) \cdot ... \cdot (x - x_n)$$

5. Ist die Anzahl der Nullstellen (Vielfachheiten mitgezählt) kleiner als n, so kann man den Funktionsterm immerhin noch als ein Produkt aus linearen und quadratischen Faktoren schreiben.

6. Ist die Anzahl der Nullstellen gleich n, so gilt für die Koeffizienten: $a_0 = (-1)^n \cdot a_n \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n$ und $a_{n-1} = -a_n \cdot (x_1 + x_2 + ... + x_n)$. (Verallgemeinerung des Satzes von Vieta)

7. Ist der Grad einer Funktion gerade, so kann sie eine beliebige Anzahl ($\leq n/2$) von Nullstellen gerader Vielfachheit haben und muss eine gerade Anzahl von Nullstellen ungerader Vielfachheit haben; die gesamte Anzahl der Nullstellen (Vielfachheiten mitgezählt) ist also gerade. Ist der Grad einer Funktion ungerade, so kann sie eine beliebige Anzahl ($\leq (n-1)/2$) von Nullstellen gerader Vielfachheit haben und muss eine ungerade Anzahl von Nullstellen ungerader Vielfachheit haben; die gesamte Anzahl der Nullstellen (Vielfachheiten mitgezählt) ist also ungerade.

8. Hat f die Nullstelle x_0 mit Vielfachheit $k>1$, so hat f ' dieselbe Nullstelle x_0, aber mit Vielfachheit $k-1$, das heißt, durch Ableiten nimmt die Vielfachheit einer Nullstelle immer um 1 ab. Hat f dagegen eine einfache Nullstelle x_0, so ist $f'(x_0) \neq 0$. Umgedreht: Hat f ' die Nullstelle x_0 mit Vielfachheit $k-1$, so kann man f schreiben als eine Funktion mit derselben Nullstelle x_0, aber mit Vielfachheit k, plus eine Konstante.

9. Hat f eine einfache Nullstelle x_0, so ist $f(x_0) = 0$, aber $f'(x_0) \neq 0$. Hat f eine doppelte Nullstelle x_0, so ist $f(x_0) = 0$ und $f'(x_0) = 0$, aber $f''(x_0) \neq 0$. Hat f eine dreifache Nullstelle x_0, so ist $f(x_0) = 0$ und $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$, aber $f'''(x_0) \neq 0$. (usw.)
(*Anmerkung:* Die Vielfachheit einer Nullstelle wird deshalb auch meist so <u>definiert</u>, dass man schaut, wie viele Ableitungen = 0 sind, bis man eine findet, die $\neq 0$ ist.)

Beweisen Sie dies!

Tipps:

1. Lösen Sie die Bedingung $f(x_0) = 0$ nach a_0 auf und klammern Sie x_0 aus.

2. Überlegen Sie sich das Vorzeichen von $f(x_0)$, wenn x_0 positiv ist. Unterscheiden Sie dabei die beiden Fälle „alle Koeffizienten positiv“ und „alle Koeffizienten negativ“.

3. Benutzen Sie die Polynomdivision und begründen Sie mittels der Bedingung $f(x_0) = 0$, dass dabei keine Zahl als Rest bleiben kann.

4. Benutzen Sie Satz 3.

5. Vergessen Sie’s – außer, Sie sind ein absolutes Mathe-Genie... der Beweis ist einfach, wenn man den sogenannten „Fundamentalsatz der Algebra“ benutzt – dafür braucht man aber vertiefte Kenntnisse über Funktionen von komplexen Zahlen, das geht **weit** über den Schulstoff hinaus. Es gibt auch einen Beweis, der ohne das alles auskommt („Beweis des sogenannten Fundamentalsatzes der Algebra im reellen Gebiete“ von Ernst Mohr, erschienen 1942 im „Journal für die reine und angewandte Mathematik“, Band 184) – wenn Sie den verstehen, dann erklären Sie ihn mir bitte... ;-)

6. Benutzen Sie die faktorisierte Form aus Satz 4 und multiplizieren Sie die Klammern aus.

7. Benutzen Sie das Verhalten von $f(x)$ für $x \to \pm\infty$ und überlegen Sie sich, wie viele Vorzeichenwechsel (VZW) jeweils nötig sind. Beachten Sie das Verhalten von f an Nullstellen gerader bzw. ungerader Vielfachheit.

8. Man benutzt hier im Wesentlichen die Darstellung von f aus Satz 3, verallgemeinert auf eine k-fache Nullstelle. Der Satz ist aber erst mit Wissen der 12. Klasse Technik bzw. 13. Klasse Nichttechnik beweisbar – nämlich mit Hilfe von Produkt- und Kettenregel. Für die Umkehrung betrachte die Funktion $g(x) = f(x) - f(x_0)$ und überlege, welche Aussagen man über die Nullstelle x_0 von g und von g' treffen kann.

9. Dies folgt fast sofort aus Satz 8.

Beweise:

1. $f(x_0) = 0 \Rightarrow a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \ldots + a_2 x_0^2 + a_1 x_0 + a_0 = 0$
$\Rightarrow a_0 = -a_n x_0^n - a_{n-1} x_0^{n-1} - \ldots - a_2 x_0^2 - a_1 x_0$
$\Rightarrow a_0 = x_0 (-a_n x_0^{n-1} - a_{n-1} x_0^{n-2} - \ldots - a_2 x_0 - a_1)$
Da nach Voraussetzung alle Koeffizienten a_i ganzzahlig sind und x_0 ganzzahlig ist, ergibt sich in der Klammer eine ganze Zahl c: $a_0 = x_0 \cdot c$
Die ganze Zahl a_0 ist also das Produkt aus der ganzen Zahl x_0 und der ganzen Zahl c. Das bedeutet aber ja genau, dass x_0 ein Teiler von a_0 ist. q.e.d.

2. Wir nehmen an, dass x_0 positiv ist.
Fall 1: Alle Koeffizienten positiv. Dann ist $f(x_0) = a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \ldots + a_2 x_0^2 + a_1 x_0 + a_0$ sicher eine positive Zahl, da jeder einzelne Summand positiv ist. Also kann $f(x_0)$ nicht gleich 0 sein, also ist x_0 keine Nullstelle.
Fall 2: Alle Koeffizienten negativ. Dann ist $f(x_0) = a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \ldots + a_2 x_0^2 + a_1 x_0 + a_0$ sicher eine negative Zahl, da jeder einzelne Summand negativ ist. Also kann $f(x_0)$ nicht gleich 0 sein, also ist x_0 keine Nullstelle.
Es gilt immer: $f(0) = a_0$. Wenn also $a_0 \neq 0$ ist, dann kann $x_0 = 0$ keine Nullstelle sein. Die Nullstellen können dann also weder positiv sein noch gleich 0 – also müssen sie negativ sein. q.e.d.

3. Wir definieren $g(x) = f(x) : (x - x_0)$. Die Division kann mit den üblichen Methoden (Polynomdivision) durchgeführt werden. In jedem einzelnen Schritt der Polynomdivision ergibt sich dabei sicher ein Vielfaches einer Potenz von x, in der Summe insgesamt also eine ganzrationale Funktion h, und diese ist sicher vom Grad n-1. Es könnte allerdings ein Rest r übrig bleiben, der dann natürlich auch durch $x - x_0$ geteilt wird:
$g(x) = f(x) : (x - x_0) = h(x) + \dfrac{r}{x - x_0}$, wobei h eine ganzrationale Funktion vom Grad n-1 ist
Diese Gleichung multiplizieren wir mit $(x - x_1)$; es ergibt sich:
$f(x) = g(x) \cdot (x - x_0) = h(x) \cdot (x - x_0) + r$
x_0 ist nach Voraussetzung aber eine Nullstelle von f, also $f(x_0) = 0$
$\Rightarrow h(x_0) \cdot (x_0 - x_0) + r = 0 \Rightarrow r = 0$
Damit bleibt: $g(x) = h(x)$, also ist g eine ganzrationale Funktion vom Grad n-1 q.e.d.

4. Ist x_1 eine Nullstelle von f und f vom Grad n, so ergibt sich laut Satz 3 nach der Polynomdivision $f(x) : (x - x_1)$ eine Funktion g vom Grad n-1. Ist x_2 eine Nullstelle von g, so ergibt sich laut Satz 3 nach der Polynomdivision $g(x) : (x - x_2)$ eine Funktion h vom Grad n-2. Dies kann man offensichtlich höchstens n-mal durchführen – dann hat man eine Funktion vom Grad 0, also eine Konstante, und diese kann offensichtlich keine weiteren Nullstellen haben. Also hat f höchstens n Nullstellen (Vielfachheiten mitgezählt).
f hat genau dann n Nullstellen, wenn f eine Nullstelle x_1 hat, g eine Nullstelle x_2 usw. Dann kann man schreiben: $f(x) = (x - x_1) \cdot g(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot h(x) = \ldots = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n) \cdot z$, wobei z eine Funktion vom Grad 0 ist, also eine Konstante. Multipliziert man die Klammern aus und nimmt dabei nur die höchsten Potenzen von x mit, so ergibt sich daraus $f(x) = z \cdot x^n + \ldots$ Also ist $z = a_n$. q.e.d.

6. a_0 ist der Koeffizient zu x^0, also ohne x. Multipliziert man die Klammern in der faktorisierten Darstellung aus Satz 4 aus, so erhält man genau dann einen Term ohne x, wenn man aus allen Klammern jeweils nur das $-x_i$ mitnimmt. Insgesamt erhält man daraus das angegebene Ergebnis für a_0.
a_{n-1} ist der Koeffizient von x^{n-1}. Multipliziert man die Klammern in der faktorisierten Darstellung aus Satz 4 aus, so erhält man genau dann einen Term mit x^{n-1}, wenn man aus n-1 Klammern jeweils das x mitnimmt und aus der restlichen Klammer das $-x_i$; man erhält dann nämlich insgesamt $a_n \cdot x^{n-1} \cdot (-x_i)$. Addiert man alle diese Terme auf, so ergibt sich das angegebene Ergebnis für a_{n-1}.

7.

Fall 1: Grad gerade

Nach Satz 4 kann die gesamte Anzahl von Nullstellen (Vielfachheiten mitgezählt) höchstens n sein, also kann die Anzahl der Nullstellen mit gerader Vielfachheit (also mindestens Vielfachheit 2) höchstens n/2 sein. f wechselt von $-\infty$ nach $+\infty$ das VZ insgesamt nicht (für $x \to \pm\infty$ gilt entweder $f(x) \to +\infty$ oder $f(x) \to -\infty$), die gesamte Anzahl der VZW muss also gerade sein. An Nullstellen gerader Vielfachheit wechselt f ihr VZ nicht, also ist die Anzahl der Nullstellen gerader Vielfachheit ansonsten beliebig. An Nullstellen ungerader Vielfachheit wechselt f ihr VZ, also muss die Anzahl der Nullstellen mit ungerader Vielfachheit gerade sein. Eine beliebige Anzahl von Nullstellen gerader Vielfachheit plus eine gerade Anzahl von Nullstellen ungerader Vielfachheit ergibt insgesamt eine gerade Anzahl von Nullstellen (Vielfachheiten mitgezählt).

Fall 2: Grad ungerade

Nach Satz 4 kann die gesamte Anzahl von Nullstellen (Vielfachheiten mitgezählt) höchstens n sein, also kann die Anzahl der Nullstellen mit gerader Vielfachheit (also mindestens Vielfachheit 2) höchstens (n-1)/2 sein. f wechselt von $-\infty$ nach $+\infty$ das VZ insgesamt (es gilt entweder $f(x) \to -\infty$ für $x \to -\infty$ und $f(x) \to +\infty$ für $x \to +\infty$ oder $f(x) \to +\infty$ für $x \to -\infty$ und $f(x) \to -\infty$ für $x \to +\infty$), die gesamte Anzahl der VZW muss also ungerade sein. An Nullstellen gerader Vielfachheit wechselt f ihr VZ nicht, also ist die Anzahl der Nullstellen gerader Vielfachheit ansonsten beliebig. An Nullstellen ungerader Vielfachheit wechselt f ihr VZ, also muss die Anzahl der Nullstellen mit ungerader Vielfachheit ungerade sein. Eine beliebige Anzahl von Nullstellen gerader Vielfachheit plus eine ungerade Anzahl von Nullstellen ungerader Vielfachheit ergibt insgesamt eine ungerade Anzahl von Nullstellen (Vielfachheiten mitgezählt).

q.e.d

8.

Hat f die Nullstelle x_0 mit Vielfachheit $k \geq 1$, so kann man schreiben: $f(x) = (x - x_0)^k \cdot g(x)$ mit einer Funktion g, für die $g(x_0) \neq 0$ gilt.

Um f abzuleiten, braucht man zunächst die Produktregel:

$$f'(x) = ((x - x_0)^k)' \cdot g(x) + (x - x_0)^k \cdot g'(x).$$

Im ersten Faktor benutzt man außerdem noch die Kettenregel:

$$f'(x) = k\,(x - x_0)^{k-1} \cdot g(x) + (x - x_0)^k \cdot g'(x)$$

ausklammern:

$$f'(x) = (x - x_0)^{k-1} \cdot (\, k \cdot g(x) + (x - x_0) \cdot g'(x)\,)$$

Den zweiten Faktor kürzen wir nun als h(x) ab: $f'(x) = (x - x_0)^{k-1} \cdot h(x)$

Es gilt: $h(x_0) = k \cdot g(x_0) + (x_0 - x_0) \cdot g'(x_0) = k \cdot g(x_0) + 0 \cdot g'(x_0) = k \cdot g(x_0) \neq 0$, da $k \geq 1$ und $g(x_0) \neq 0$.

Also hat f ' die Nullstelle x_0 mit Vielfachheit k–1.

Insbesondere für k = 1 ergibt sich: $f'(x) = (x - x_0)^0 \cdot h(x) = h(x)$, also $f'(x_0) = h(x_0) \neq 0$

Umgedreht: Es sei eine ganzrationale Funktion f gegeben mit $f'(x) = (x - x_0)^{k-1} \cdot h(x)$ mit $h(x_0) \neq 0$. Wir definieren die Konstante $c = f(x_0)$ und $g(x) = f(x) - c$; dann ist $g(x_0) = f(x_0) - c = f(x_0) - f(x_0) = 0$, d.h. x_0 ist eine Nullstelle von g. Die Vielfachheit von x_0 nennen wir m; dann hat laut Teil 1 dieses Beweises g'(x) die Nullstelle x_0 mit der Vielfachheit m–1. Aus $g(x) = f(x) - c$ folgt aber sofort $g'(x) = f'(x)$, d.h. f '(x) hat die Nullstelle x_0 mit der Vielfachheit m–1. Aus der Voraussetzung für die Form von f '(x) folgt dann sofort, dass k = m sein muss, d.h. wir haben $g(x) = (x - x_0)^k \cdot j(x)$, wobei $j(x_0) \neq 0$ ist. Da $f(x) = g(x) + c$ ist, folgt damit sofort die Behauptung.

q.e.d.

Satz 9:

Fall 1: einfache Nullstelle. Dann ist natürlich $f(x_0) = 0$, und laut Satz 8 gilt, dass $f'(x_0) \neq 0$ ist.

q.e.d.

Fall 2: doppelte Nullstelle. Dann ist natürlich $f(x_0) = 0$. Laut Satz 8 hat f ' dieselbe Nullstelle x_0, allerdings nur einfach. Also ist auch $f'(x_0) = 0$. Wieder laut Satz 8 folgt, dass $f''(x_0) \neq 0$ ist (weil ja f '' die Ableitung von f ' ist!).

q.e.d.

Fall 3: dreifache Nullstelle. Dann ist natürlich $f(x_0) = 0$. Laut Satz 8 hat f ' dieselbe Nullstelle x_0, allerdings nur doppelt. Also ist auch $f'(x_0) = 0$. Wieder laut Satz 8 folgt, dass f '' ebenfalls dieselbe Nullstelle x_0 hat, allerdings nur einfach (weil ja f '' die Ableitung von f ' ist). Also ist auch $f''(x_0) = 0$. Wieder laut Satz 8 folgt, dass $f'''(x_0) \neq 0$ ist (weil ja f ''' die Ableitung von f '' ist).

q.e.d.