Rechnen mit (Quadrat-)Wurzeln

Definition: Gilt für eine Zahl $x \in \mathbb{R}_0^+$, dass $x^n = y$ ist ($n \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{R}_0^+$), so heißt x die n-te Wurzel von y, und man schreibt $x = \sqrt[n]{y}$. Die Zahl unter der Wurzel heißt der Radikand. Speziell für n = 2 schreibt man nur $x = \sqrt{y}$ und spricht von der Quadratwurzel, oft einfach auch nur von der Wurzel.

Beispiele:

- $\sqrt{4} = 2$, denn $2^2 = 4$; $\sqrt[3]{8} = 2$, denn $2^3 = 8$; $\sqrt[4]{16} = 2$, denn $2^4 = 16$
- $\sqrt{1} = 1$, denn $1^2 = 1$
- $\sqrt{0} = 0$, denn $0^2 = 0$
- $\sqrt{144} = 12$, denn $12^2 = 144$
- $\sqrt{6{,}25} = 2{,}5$, denn $2{,}5^2 = 6{,}25$
- $\sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$, denn $\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$
- $\sqrt{-1}$ existiert nicht, weil es keine reelle Zahl gibt, deren Quadrat gleich –1 ist
- $\sqrt[3]{-8} = -2$, denn $(-2)^3 = -8$ *(eigentlich falsch, weil das Ergebnis immer $\in \mathbb{R}_0^+$ sein sollte!)*
- $\sqrt{2}$ = ??? ***(nein, das ist nicht 1,41 oder 1,4142136 oder so!!!)***

$\sqrt{2}$ liegt wohl zwischen 1 und 2, denn $1^2 = 1$, $2^2 = 4$
➔ für Zahlen zwischen 1 und 2 gilt also wohl, dass ihr Quadrat zwischen 1 und 4 liegt
ausprobieren: $1{,}1^2 = 1{,}21$; $1{,}2^2 = 1{,}44$; $1{,}3^2 = 1{,}69$; $1{,}4^2 = 1{,}96$; $1{,}5^2 = 2{,}25$
➔ $\sqrt{2}$ liegt wohl zwischen 1,4 und 1,5
ausprobieren… $1{,}41^2 = 1{,}9881$; $1{,}42^2 = 2{,}0164$
➔ $\sqrt{2}$ ist wohl eine Zahl zwischen 1,41 und 1,42; usw.

Das kann man jetzt lange so weiter machen… Wenn $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl wäre, dann müssten die Nachkommastellen irgendwann aufhören – oder periodisch weitergehen. Aber: $\sqrt{2}$ ist überhaupt nicht rational, sondern eben eine irrationale Zahl! (Das wurde schon vor über 2500 Jahren gezeigt, wahrscheinlich vom griechischen Mathematiker Hippasos von Metapont.) Die Nachkommastellen gehen also ewig weiter, ohne sich irgendwann zu wiederholen. ➔ Man kann $\sqrt{2}$ (und prinzipiell alle irrationalen Zahlen!) nie exakt angeben, sondern immer nur näherungsweise, also gerundet.

Quadrieren als Umkehrung des (Quadrat-)Wurzelziehens:

- $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$ (nach Definition!), allgemein: $\boxed{\left(\sqrt{x}\right)^2 = x}$ für alle $x \in \mathbb{R}_0^+$
- umgedreht: $\sqrt{2^2} = \sqrt{4} = 2 = |2|$, aber auch $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2 = |-2|$, allgemein also:
  $\boxed{\sqrt{x^2} = |x|}$ für alle $x \in \mathbb{R}$

Addition und Subtraktion:

Beispiele:

1) $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = (3 + 5)\ \sqrt{2} = 8\sqrt{2}$ *(den Malpunkt kann man weglassen!)*
2) $2{,}5\sqrt{23} - \frac{3}{10}\sqrt{23} = (2{,}5 - 0{,}3)\sqrt{23} = 2{,}2\sqrt{23}$
3) $5\sqrt{2} + \pi\sqrt{2} = (5 + \pi)\sqrt{2}$

Werden Vielfache derselben Wurzel addiert/subtrahiert, so addiert/subtrahiert man die Vorfaktoren und lässt die Wurzel dahinter stehen. (D-Gesetz!)

Alle bekannten Rechengesetze (K-, A-, D-Gesetze, Vorzeichenregeln, Potenzgesetze, …) gelten weiterhin!

Vorsicht:
1) Summen und Differenzen von Vielfachen unterschiedlicher Wurzeln können dagegen i. A. ***nicht*** vereinfacht werden! z. B.:

- $\sqrt{2}+\sqrt{3}=?$ (***nicht*** $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $2\sqrt{5}$ ***oder ähnliches!!!***)
- $3\sqrt{5}+2\sqrt{7}=?$ (***nicht*** $\mathbf{5\sqrt{5}},\ \mathbf{5\sqrt{7}},\ \mathbf{5\sqrt{12}},\ \mathbf{5\sqrt{35}}$ ***oder ähnliches!!!***)

2) Andererseits kann man auch aus Summen (und Differenzen) ***nicht*** einfach gliedweise die Wurzel ziehen! z. B.: $\sqrt{3^2+4^2}$ ist ***nicht*** dasselbe wie $3+4=\sqrt{3^2}+\sqrt{4^2}$!!!

Multiplikation und Division:
Bsp.: $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=?$ kann man nicht direkt rechnen – aber folgendes kann man rechnen:

$$\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\right)^2=\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\right)=\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\right)=2\cdot3=\left(\sqrt{2\cdot3}\right)^2$$

also gilt anscheinend allgemein: $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$; ähnlich zeigt man: $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$

teilweise Radizieren:
Beispiel: $\sqrt{8}\approx 2{,}828$, also anscheinend genau das doppelte von $\sqrt{2}$! Wie kommt man darauf?

$$\sqrt{8}=\sqrt{4\cdot2}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{2}=2\sqrt{2}$$

Oft kann man den Radikanden in ein Produkt aus einer Quadratzahl und einer anderen Zahl zerlegen. Aus der Quadratzahl kann man dann die Wurzel ziehen und sie vor die Wurzel aus der anderen Zahl schreiben. Man spricht vom „teilweise Radizieren“.

Nenner rational machen:
In Rechnungen ist es häufig unpraktisch, wenn eine Wurzel im Nenner eines Bruchs steht, z. B.:

$$\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}$$

➔ Um vereinfachen zu können, muss man die Wurzel „nach oben“ in den Zähler bekommen; man sagt, man macht den Nenner rational. Dafür erweitert man den Bruch passend:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Steht im Nenner eines Bruchs eine Wurzel, so erweitert man den Bruch mit dieser Wurzel.

Damit kann man nun zusammenfassen:

$$\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$$

Außerdem kann man damit den Bruch auch abschätzen: $\sqrt{2}\approx 1{,}4$, also ist $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\approx\frac{1{,}4}{2}=0{,}7$.

komplexeres Beispiel:

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\frac{1\cdot(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)\cdot(\sqrt{2}-1)}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}-\sqrt{2}\cdot1+1\cdot\sqrt{2}-1\cdot1}=\frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{2}+\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}-1}{1}=\sqrt{2}-1$$

Also: Steht im Nenner eines Bruchs eine Summe/Differenz mit ein oder zwei Wurzeln, so erweitert man den Bruch mit der entsprechenden Differenz/Summe.

Potenzen mit rationalen Exponenten:
Beispiele:
1) $\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^2=3^{\frac{1}{2}\cdot2}=3^1=3$, also ist $3^{\frac{1}{2}}=$

2) $\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3=2^{\frac{1}{3}\cdot3}=2^1=2$, also ist $2^{\frac{1}{3}}=$

Allgemein gilt also: $x^{1/n}=$

bzw. noch allgemeiner $x^{m/n}=$