# Grundlegende Rechengesetze und Fachbegriffe

Begriffe:
Jede sinnvolle Zusammenstellung aus Zahlen, Rechenzeichen und Klammern heißt ein Term.
Beachte dabei die Rechenreihenfolge: Punkt vor Strich, Klammern zuerst!

Grundrechenarten:

- Addition: a + b (Summe, besteht aus Summanden (*evtl. mehr als zwei*))
- Subtraktion: a – b (Differenz, besteht aus Minuend und Subtrahend (*evtl. mehrere; M vor S!*))

Summanden/Minuend/Subtrahenden werden zusammen manchmal auch „(Summen-)Glieder" genannt.

- Multiplikation: a · b (Produkt, besteht aus Faktoren (*evtl. mehr als zwei*))
- Division: a : b oder a / b oder $\frac{a}{b}$ (Quotient, besteht aus Dividend und Divisor (*evtl. mehrere; d vor s!*))

Die jeweils letzte Rechenoperation, die nach den Reihenfolge-Regeln auszuführen wäre, bestimmt die Art eines Terms. Hat man diese Rechenoperation ermittelt, so kann man den Term in zwei Teilterme zerlegen und für beide wieder die Art bestimmen usw. Man spricht von einer Gliederung des Terms. (Graphisch kann man das in einem „Termgliederungsbaum" darstellen.)

Beispiel:
$23 \cdot (45 - 31) + 12:4$ ist eine Summe mit den Summanden $23 \cdot (45 - 31)$ und $12:4$. Der erste Summand ist ein Produkt mit den Faktoren 23 und 45 – 31, der zweite Summand ist ein Quotient mit dem Dividend 12 und dem Divisor 4. Der zweite Faktor des Produkts ist eine Differenz mit dem Minuend 45 und dem Subtrahend 31.

Rechenregeln:

- K(ommutativ)-Gesetz der Addition: a + b = b + a (*Reihenfolge egal!*)
  auch bei Subtraktion (VZ beachten!) z. B. 2 – 3 = – 3 + 2
- K(ommutativ)-Gesetz der Multiplikation: a · b = b · a (*Reihenfolge egal!*)
  gilt bei Division nicht! (6 : 2 ist nicht dasselbe wie 2 : 6)
- A(ssoziativ)-Gesetze der Addition und Multiplikation:
  $$(a + b) + c = a + (b + c) \qquad \text{und} \qquad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$
  z. B.:
  - (2 + 3) + 4 = 5 + 4 = 9 und 2 + (3 + 4) = 2 + 7 = 9
  - (2 · 3) · 4 = 6 · 4 = 24 und 2 · (3 · 4) = 2 · 12 = 24

  Gilt auch bei Subtraktion, z. B.: 2 + 3 – 1 = (2 + 3) – 1 = (3 + 2) – 1 = 3 + (2 – 1) = 3 + 1 = 4

Zusammen mit dem K-Gesetz folgt: beim Addieren und Multiplizieren von beliebig vielen Zahlen ist die Reihenfolge egal! Damit kann man Rechnungen vereinfachen, z. B.:
$$18 \cdot 15 = 9 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 9 \cdot (2 \cdot 3) \cdot 5 = 9 \cdot (3 \cdot 2) \cdot 5 = (9 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 5) = 27 \cdot 10 = 270$$

- D(istributiv)-Gesetz: (a + b) · c = a · c + b · c
  z. B.: (2 + 3) · 4 = 5 · 4 = 20 und 2 · 4 + 3 · 4 = 8 + 12 = 20
  gilt auch entsprechend, wenn in der Klammer – statt + steht: (a – b) · c = a · c – b · c
  oder wenn dort mehr als zwei Terme stehen: z. B. (a – b + c) · d = a · d – b · d + c · d
  gilt auch entsprechend, wenn hinter der Klammer **:** statt · steht: (a + b) : c = a : c + b : c
  gilt auch entsprechend, wenn · vor der Klammer steht: a · (b + c) = a · b + a · c
  gilt ***nicht***, wenn vor der Klammer **:** steht! c : (a + b) ***ist nicht gleich*** c : a + c : b!

kann zum Ausmultiplizieren von Klammern und zum Ausklammern benutzt werden; Beispiele:

a) 2 · 3 + 2 · 4 = 2 · (3 + 4) = 2 · 7 = 14
b) (4 + 6) : 2 = 4 : 2 + 6 : 2 = 2 + 3 = 5
c) 18 · 15 = 18 · (10 + 5) = 18 · 10 + 18 · 5 = 180 + 90 = 270
   bzw. = (10 + 8) · (10 + 5) = 10 · 10 + 10 · 5 + 8 · 10 + 8 · 5 = 100 + 50 + 80 + 40 = 270

Beachte:
1) Beim Multiplizieren eines Produkts wird nur einer der Faktoren multipliziert (man kann sich aussuchen, welcher); beim Multiplizieren einer Summe werden alle Summanden multipliziert!
2) Zwei Klammern, die Summen / Differenzen enthalten, werden miteinander multipliziert, indem man jede Zahl in der ersten Klammer mit jeder Zahl in der zweiten Klammer multipliziert, z. B.:

$$(10+8)\cdot(20+5) = 10\cdot 20 + 10\cdot 5 + 8\cdot 20 + 8\cdot 5$$

(Dies kann man auch übersichtlich in Tabellenform darstellen.)

Potenzen:
Definition: Multipliziert man eine Zahl a (mehrmals) mit sich selbst, so kürzt man diesen Term

$$a\cdot a\cdot a\cdot \ldots \cdot a$$

mit $a^n$ (sprich: „a hoch n“) ab und nennt ihn eine Potenz; die natürliche Zahl n (Exponent) gibt dabei an, wie oft der Faktor a (Basis) vorkommt. Speziell für $a^2$ („a hoch 2“) sagt man oft auch „a Quadrat“.

Primfaktorzerlegung, größter gemeinsamer Teiler, kleinstes gemeinsames Vielfaches:
Jede natürliche Zahl kann (bis auf die Reihenfolge) eindeutig als Produkt von (Potenzen von) Primzahlen darstellen, z. B. $360 = 2^3\cdot 3^2\cdot 5$.

Damit kann man den größten gemeinsamen Teiler ggT und das kleinste gemeinsame Vielfache kgV zweier natürlicher Zahlen bestimmen: Für den ggT nimmt man alle Primfaktoren, die in **beiden** Primfaktorzerlegungen vorkommen (ähnlich wie bei einer Schnittmenge), für das kgV nimmt man alle Primfaktoren, die in **mindesten einer** der Primfaktorzerlegungen vorkommen (ähnlich wie bei einer Vereinigungsmenge).
Beispiel: $12 = 2^2\cdot 3$, $18 = 2\cdot 3^2$; dann ist ggT(12;18) = $2\cdot 3 = 6$ und kgV(12;18) = $2^2\cdot 3^2 = 36$