Die Quotientenregel

Im Folgenden soll eine Regel hergeleitet werden, wie man einen Quotienten von Funktionen, also

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

ableitet. Dass die Ableitung ***nicht*** einfach

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{v'(x)}$$

ist, sieht man, wenn man sich als Beispiel u(x) = x und v(x) = 1 anschaut:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{x}{1} = x \text{, also } f'(x) = 1;$$

$$\textbf{\textit{aber:}}\ u'(x) = 1,\ v'(x) = 0, \text{ also } \frac{u'(x)}{v'(x)} = \frac{1}{0}\ !$$

Die Herleitung erfolgt nun in zwei Schritten: $\frac{u(x)}{v(x)}$ kann als Produkt von *u(x)* und $\frac{1}{v(x)}$ geschrieben werden; also wird zunächst eine Ableitungsregel für den Kehrwert einer Funktion hergeleitet.

<u>a) Ableitung der „Kehrfunktion“</u> (nicht Umkehrfunktion!)

Die „Kehrfunktion“ $\frac{1}{v(x)}$ kann man auch schreiben als Verkettung von v(x) mit der äußeren Funktion u(x) = $\frac{1}{x}$. Berechnen wir also zunächst die Ableitung von u mittels der Definition:

$$u'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}$$

Diesen Ausdruck muss man nun so weit zusammenfassen, bis man ihn direkt berechnen kann. Die beiden Brüche im Zähler bringt man dafür zunächst auf den Hauptnenner:

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{x-(x+h)}{(x+h)x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-h}{(x+h)x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{(x+h)x}$$

Diesen Grenzwert kann man nun direkt berechnen (h = 0 einsetzen!); es bleibt:

$$u'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Mit der Kettenregel folgt dann:

$$\boxed{\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{1}{v^2}\cdot v' = -\frac{v'}{v^2}}$$

<u>b) Ableitung eines Quotieten</u>

Hier wendet man erst die Produktregel, dann die für die Kehrfunktion an:

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \left(u(x)\cdot\frac{1}{v(x)}\right)' = u'(x)\cdot\frac{1}{v(x)} + u(x)\cdot\left(\frac{1}{v(x)}\right)' = u'(x)\cdot\frac{1}{v(x)} + u(x)\cdot\left(-\frac{v'(x)}{v^2(x)}\right)$$

Bringt man die beiden Brüche auf den Hauptnenner und fasst zusammen, so folgt:

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}}$$