Quadratische Funktionen

- Quadratische Funktionen haben Terme der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ (allgemeine Form); man kann sie immer umschreiben in die Form $f(x) = a\,(x - x_S)^2 + y_S$ (Scheitelform, s. u.). Außerdem gibt es noch die faktorisierte Form $f(x) = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$, wobei x_1 und x_2 die Nullstellen von f, also die Lösungen der Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ sind. (***wichtig!***)
- Ihre maximal mögliche Definitionsmenge ist $\mathbb{D} = \mathbb{R}$.
- Die Funktionsgraphen sind Parabeln, für $|a| = 1$ Normalparabeln.
- x_S bzw. y_S sind die x- bzw. y-Koordinate des Scheitel(punkt)s; diesen bestimmt man, indem man den Funktionsterm mit quadratischer Ergänzung in Scheitelform bringt:
  - Vorfaktor a von x^2 ausklammern
  - die Hälfte des Vorfaktors von x, quadriert, addieren und subtrahieren
  - 1. bzw. 2. binomische Formel rückwärts anwenden
  - äußere Klammer auflösen
  - Koordinaten des Scheitels ablesen (bei x_S: Vorzeichen umgedreht!)
- Ist $a > 0$, so ist die Parabel nach oben geöffnet, der Scheitel ist der tiefste Punkt, y_S ist das Minimum, und die Wertemenge ist $\mathbb{W} = [y_S;\infty[$. Ist $a < 0$, so ist sie nach unten geöffnet, der Scheitel ist der höchste Punkt, y_S ist das Maximum, und die Wertemenge ist $\mathbb{W} =]-\infty;y_S]$.
- Ist $|a| > 1$, so ist die Parabel in y-Richtung gestreckt (schmaler als die Normalparabel), ist $|a| < 1$, so ist die Parabel in y-Richtung gestaucht (breiter als die Normalparabel).
- Sind Δx und Δy die Abstände eines beliebigen Punkts der Parabel zum Scheitelpunkt (!), so kann man a folgendermaßen berechnen: $a = \dfrac{\Delta y}{(\Delta x)^2}$ (vergleiche die Steigungsformel bei Geraden!).
- (b gibt die Steigung der Parabel bzw. ihrer Tangenten im Schnittpunkt mit der y-Achse an.)
- c ist der y-Achsenabschnitt, d. h. die Parabel schneidet die y-Achse in $S_y(0|c)$.
- Die Parabeln sind immer symmetrisch zur (senkrechten!) Geraden mit der Gleichung $x = x_S$ (Symmetrieachse); dies kann man beim Berechnen von Wertetabellen benutzen. Noch schneller geht das Berechnen von Wertetabellen bzw. das Zeichnen, wenn man die Beziehung $\Delta y = a\cdot(\Delta x)^2$ benutzt (siehe die Formel für a oben).
- (Die beiden Teile links und rechts der Symmetrieachse heißen auch Parabeläste.)
- Schnittpunkte mit den Achsen:
  - den Schnittpunkt mit der y-Achse kann man in der Normalform direkt ablesen (siehe y-Achsenabschnitt); in der Scheitelform und der faktorisierten Form muss man ihn berechnen: x = 0 in Funktionsterm einsetzen ➔ $S_y(0\mid f(0))$
  - die Schnittpunkte mit der x-Achse kann man in der faktorisierten Form direkt ablesen, in der Normalform und der Scheitelform muss man sie berechnen: Funktionsterm gleich 0 setzen, quadratische Gleichung lösen (also Nullstellen $x_{1,2}$ berechnen); die Schnittpunkte sind dann $S_1(x_1|0)$ und $S_2(x_2|0)$; für $x_1 = x_2$ gibt es nur einen Berührpunkt $B(x_{1,2}|0) = S$
    - wenn b = 0, also Gleichung der Form $ax^2 + c = 0$: x^2 isolieren, $\pm\sqrt{\ }$ ziehen
    - wenn c = 0, also Gleichung der Form $ax^2 + bx = 0$: ax ausklammern, eine Lösung ist $x_1 = 0$, die andere erhält man, indem man die Klammer gleich Null setzt
    - wenn beide ungleich 0: Lösungsformel $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, oder in einfachen Fällen Satz von Vieta verwenden: $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ und $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$
    - Die Anzahl der Nullstellen erhält man aus der Diskriminante $D = b^2 - 4ac$: keine Nullstelle für $D < 0$, eine für $D = 0$ (dann Scheitel auf x-Achse!), zwei für $D > 0$
    - wenn Term in Scheitelform, also Gleichung der Form $a\,(x - x_S)^2 + y_S = 0$: $(x - x_S)^2$ isolieren, $\pm\sqrt{\ }$ ziehen, $+ x_S$

- Parabelgleichungen aufstellen:
  - wenn Informationen über den Scheitel und ein weiterer Punkt gegeben sind: Scheitelform verwenden; in diese zunächst die Scheitelkoordinate(n) x_S, y_S einsetzen; dann den weiteren Punkt einsetzen; damit a ausrechnen
  - wenn drei beliebige Punkte (nicht der Scheitel) gegeben sind: Normalform verwenden, in diese alle drei Punkte einsetzen; es ergibt sich ein lineares Gleichungssystem für die Unbekannten a, b, c; dieses mit beliebigem Verfahren lösen
  - wenn die Nullstellen x_1 und x_2 (also die Stellen, wo die Parabel die x-Achse schneidet) und ein weiterer Punkt gegeben sind: faktorisierte Form verwenden; in diese zunächst die Nullstellen einsetzen; dann den weiteren Punkt einsetzen; damit a ausrechnen
- Schnitt von Parabel und Gerade: Funktionsterme gleichsetzen; quadratische Gleichung lösen ➔ x-Wert(e) des/der gemeinsamen Punkts/Punkte (hat die Gleichung zwei Lösungen, so handelt es sich um Schnittpunkte, die Gerade ist dann eine Sekante; hat sie nur eine Lösung, so handelt es sich um einen Berührpunkt, die Gerade ist dann eine Tangente); x-Wert(e) in einen der beiden Funktionsterme einsetzen ➔ y-Wert(e) der/des Schnittpunkte/Berührpunkts
- Schnitt von Parabeln: Funktionsterme gleichsetzen; lineare / quadratische Gleichung lösen ➔ x-Wert(e) des/der gemeinsamen Punkts/Punkte; weiter wie bei Schnitt von Parabel und Gerade