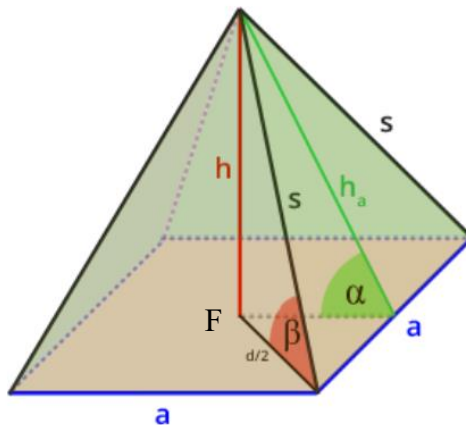


# Pyramiden

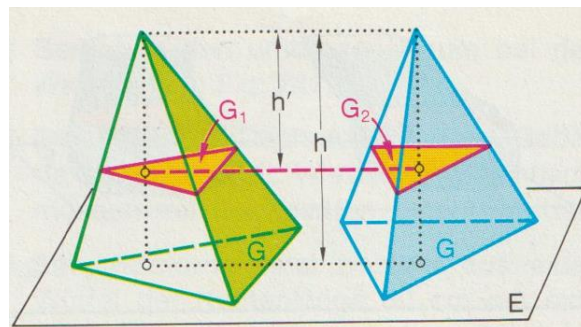
- Eine Pyramide heißt gerade, wenn ihre Grundfläche einen Umkreis besitzt und der Höhenfußpunkt F (oder H) dessen Mittelpunkt ist, d. h. die Spitze liegt „mitten über der Grundfläche“. Sie heißt regelmäßig (regulär), wenn die Grundfläche ein regelmäßiges Vieleck ist und alle Seitenkanten gleich lang sind.
- Die Seitenflächen (Dreiecke) bilden den Mantel der Pyramide;  $O = G + M$ ; speziell bei regelmäßigen Pyramiden (n Seiten, Seitenkante a, Seitenhöhe  $h_a$ ) gilt dabei immer:  $M = n \cdot \frac{1}{2} a h_a$

Höhen und Steilheit einer Pyramide (hier: Spezialfall gerade quadratische Pyramide):



- Satz von Pythagoras:
- Seitenfläche gegen die Grundfläche: Neigungswinkel  $\alpha$
- Seitenkante gegen die Grundfläche: Neigungswinkel  $\beta$

Betrachte nun zwei Pyramiden mit denselben Grundflächeninhalten,  $G_1 = G_2$ , und denselben Höhen, aber unterschiedlichen Formen:

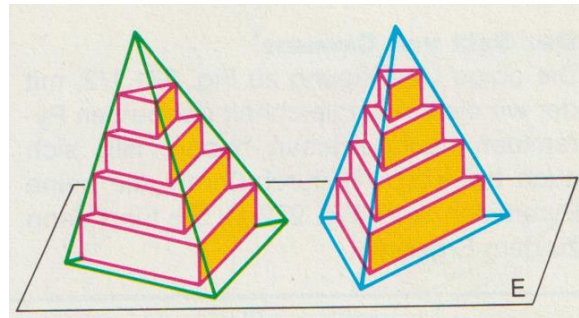


Die Seitenkanten in den Dreiecken  $G_1$  bzw.  $G_2$  sind jeweils parallel zu den Seitenkanten in den Dreiecken  $G$ ; mit Strahlensatz folgt, dass sich die Längen der Kanten jeweils wie  $h'$  zu  $h$  verhalten. Dasselbe Verhältnis ergibt sich auch für die Längen der Dreieckshöhen.

Deshalb gilt für die Verhältnisse der Flächeninhalte:  $G'_1/G_1 = (h'/h)^2$  und  $G'_2/G_2 = (h'/h)^2$

Damit folgt:  $G'_1 = G'_2$ , die Flächeninhalte der Dreiecke in jeweils derselben Höhe sind also auch jeweils gleich.

Beide Pyramiden kann man sich in Stufen zerlegt denken:



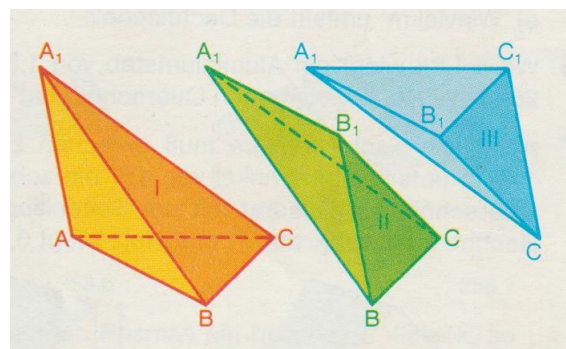
Die Stufen sind Prismen; da sie jeweils dieselben Grundflächen und dieselben Höhen haben, haben die Stufen auch jeweils dasselbe Volumen. → Stufenpyramiden mit gleichem  $G$  und  $h$  haben dasselbe Volumen.

Jede Pyramide kann man sich aber beliebig genau durch Stufenpyramiden angenähert werden.

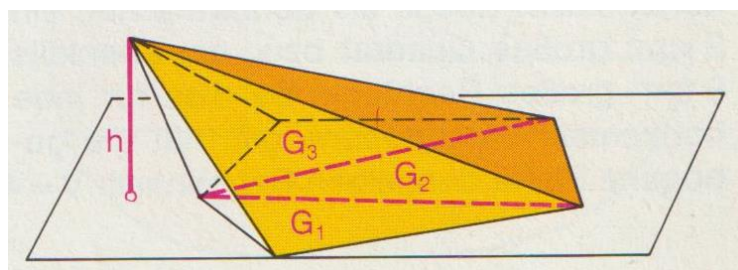
→ Pyramiden mit gleichem  $G$  und  $h$  haben jeweils dasselbe Volumen.

(Diese Überlegung kann man verallgemeinern zum Satz von Cavalieri: Wenn zwei Körper derselben Höhe jeweils Schnittflächen derselben Größe haben, wenn sie von einer Ebene parallel zur Grundfläche geschnitten werden, dann haben sie dasselbe Volumen.)

Ein dreiseitiges Prisma kann in drei dreiseitige Pyramiden zerlegt werden; diese haben jeweils dasselbe Volumen, da sie jeweils das gleiche  $G$  und  $h$  haben. →  $V = \frac{1}{3}G h$  für dreiseitige Pyramiden



Jede Pyramide kann in dreiseitige Pyramiden zerlegt werden:



→  $V = \frac{1}{3}G h$  gilt für beliebige Pyramiden