Kurvendiskussion mit Parameter – Lösungen

<u>2002-AI</u>

1.1 $f_k'(x) = \frac{2}{9}x^2 - 2$; $f_k''(x) = \frac{4}{9}x$ (; $f_k'''(x) = \frac{4}{9}$)

Stellen mit waagrechter Tangente: $\frac{2}{9}x^2 - 2 = 0 \mid +2 \mid : \frac{2}{9} \mid \pm\sqrt{\ }$ ➔ $x_{1,2} = \pm 3$

(beide einfach ➔ VZW von f_k' ➔ ExP)

$f_k''(3) = \frac{4}{3} > 0$; $f_k(3) = -4 + k$ ➔ TiP(3|–4+k) $f_k''(-3) = -\frac{4}{3} < 0$; $f_k(-3) = 4 + k$ ➔ HoP(–3|4+k)

Flachstellen: $\frac{4}{9}x = 0$ ➔ $x_1 = 0$

einfach ➔ VZW von f_k'' ➔ Wendestelle (*oder:* $f_k'''(0) = \frac{4}{9} \neq 0$ ➔ Wendestelle)

$f_k(0) = k$ ➔ WeP(0|k)

1.2 *mit Skizzen folgt:*

1) eine Nullstelle für $k < -4$ *(HoP liegt unter x-Achse)*

2) zwei Nullstellen für $k = -4$ *(HoP liegt auf x-Achse)*

3) drei Nullstellen für $-4 < k < 4$ *(HoP liegt über, TiP unter x-Achse)*

4) zwei Nullstellen für $k = 4$ *(TiP liegt auf x-Achse)*

5) eine Nullstelle für $k > 4$ *(TiP liegt über x-Achse)*

4.1 G_{f-4} erhält man, indem man G_{f5} um 9 nach unten verschiebt

<u>2002-AII</u>

1.0 $f_a(x) = \ldots = -\frac{1}{8}(x^3 + (4-a)x^2 + (-4a+4)x - 4a)$

1.1 Gleichung lösen: $\frac{1}{8}(a - x)(x^2 + 4x + 4) = 0$ ➔ $(a - x)(x + 2)^2 = 0$ ➔ $x_1 = a$; $x_{2,3} = -2$

mit Hilfe von Skizzen folgt: $f_a(x) \geq 0$ in $]-\infty; a]$ *(zu unterscheiden sind die Fälle a < –2, a = –2 und a > –2, in allen drei Fällen erhält man aber dasselbe Ergebnis!)*

oder, deutlich schneller: $f_a(x) = \frac{1}{8}(a - x)(x + 2)^2 \geq 0 \mid : \frac{1}{8}(x + 2)^2$

(da man hier durch Faktoren teilt, die sicher ≥0 sind, dreht sich die Richtung der Ungleichung nicht um!)

➔ $a - x \geq 0$ ➔ $x \leq a$ ➔ $f_a(x) \geq 0$ in $]-\infty; a]$

1.2 $f_a'(x) = -\frac{1}{8}(3x^2 + (4-a)\cdot 2x + (-4a+4)\cdot 1 - 0) = -\frac{1}{8}(3x^2 + (8-2a)x - 4a + 4)$

Stellen mit waagrechter Tangente: $-\frac{1}{8}(3x^2 + (8-2a)x - 4a + 4) = 0$ ➔ $3x^2 + (8-2a)x - 4a + 4 = 0$

Diskriminante: $D = (8 - 2a)^2 - 4\cdot 3\cdot(-4a+4) = \ldots = 16 + 16a + 4a^2 = \ldots = 4(2 + a)^2 \geq 0$ für alle a

1) $D = 0$, also $a = -2$: eine doppelte Lösung ➔ ein TeP, also keine ExP
2) $D > 0$, also $a \neq -2$: zwei einfache Lösungen ➔ zwei ExP

1.3 Schnittpunkt mit der y-Achse: $x = 0$ ➔ $f_a'(0) = 1{,}5$ ➔ $-\frac{1}{8}(-4a + 4) = 1{,}5$ ➔ $a = 4$

<u>2003-AII</u>

1.1 $\frac{1}{2a^2}(x^3 - 6ax^2 + 8a^2x) = 0$ ➔ $x(x^2 - 6ax + 8a^2) = 0$ ➔ $x_1 = 0$

$$x_{2,3} = \frac{6a \pm \sqrt{(6a)^2 - 4\cdot 1\cdot 8a^2}}{2\cdot 1} = \frac{6a \pm \sqrt{36a^2 - 32a^2}}{2} = \frac{6a \pm \sqrt{4a^2}}{2} = \frac{6a \pm 2a}{2}$$ ➔ $x_2 = 2a$; $x_3 = 4a$

Da $a > 0$ gegeben ist, sind die drei Nullstellen x_1, x_2, x_3 immer unterschiedlich ➔ Die Behauptung ist falsch.

(alternativ, ohne $x_{2,3}$ überhaupt zu berechnen: Da es die Nullstelle $x_1 = 0$ immer gibt, müsste die quadratische Funktion mit dem Funktionsterm $x^2 - 6ax + 8a^2$ auch die Nullstelle 0 haben, damit es insgesamt nur eine gibt. Einsetzen liefert $0^2 - 6a\cdot 0 + 8a^2 = 0$ ➔ $8a^2 = 0$ ➔ $a = 0$. Dies steht aber im Widerspruch zur Voraussetzung $a > 0$, also ist die Behauptung falsch.)

1.2 $f_a'(x) = \frac{1}{2a^2}(3x^2 - 12ax + 8a^2)$; $f_a''(x) = \frac{1}{2a^2}(6x - 12a)$ (; $f_a'''(x) = \frac{1}{2a^2}\cdot 6 = \frac{3}{a^2}$)

Flachstellen: $f_a''(x) = \frac{1}{2a^2}(6x - 12a)$ ➔ $6x - 12a = 0$ ➔ $x_1 = 2a$

einfach ➔ VZW von f_a'' ➔ Wendestelle (oder: $f_a'''(2a) = \frac{3}{a^2} \neq 0$ ➔ Wendestelle)

$f_a(2a) = 0$ *(laut 1.1 ist x = 2a immer eine Nullstelle! muss man gar nicht noch mal ausrechnen!)*
➔ WeP(2a|0), unabhängig von a liegt der WeP also immer auf der x-Achse (y = 0!)

$f_a'(2a) = ... = -2$ ➔ t: $y = -2\cdot(x - 2a) + 0$ ➔ t: $y = -2x + 4a$ *(mit Tangenten-Formel aus Merkhilfe!)*

<u>2004-AI</u>
1.1 $\frac{1}{27}(x + 3)^2 (x^2 + k) = 0$ ➔ $x_{1,2} = -3$ oder $x^2 = -k$
1) $k > 0$: $x^2 = -k$ hat keine Lösung ➔ $x_{1,2} = -3$ doppelt
2) $k = 0$: $x_{1,2} = -3$; $x_{3,4} = 0$ beide doppelt
3) $k < 0$: $x_{1,2} = -3$ doppelt; $x_{3,4} = \pm\sqrt{-k}$ beide einfach

(für k = –9 hätte man $x_{1,2.3} = -3$ dreifach und $x_4 = 3$ einfach)

<u>2005-AII</u>
1.1 wegen $a > 0$ ist der LK $\frac{1}{4a} > 0$ ➔ alle Graphen verlaufen von links oben nach rechts oben
➔ $\lim_{x\to\pm\infty} f_a(x) = \infty$

1.2 $\frac{1}{4a}x^4 - 2x = 0$ ➔ $\frac{1}{4a}x(x^3 - 8a) = 0$ ➔ $x_1 = 0$ einfach oder $x^3 - 8a = 0$ ➔ $x_2 = \sqrt[3]{8a} = 2\sqrt[3]{a}$ einfach

1.3 Ursprung: $x = 0$
$f_a(0) = 0$
$f_a'(x) = \frac{1}{a}x^3 - 2$ ➔ $f_a'(0) = -2$
➔ t: $y = -2\cdot(x - 0) + 0$ ➔ t: $y = -2x$ unabhängig von a *(mit Tangenten-Formel aus Merkhilfe!)*

1.4 bei $x = 2$ relativer Extrempunkt ➔ dort muss der Graph eine waagrechte Tangente, also Steigung = 0 haben: $f_a'(2) = 0$ ➔ $\frac{1}{a}\cdot 2^3 - 2 = 0$ ➔ $a = 4$
$f_4''(x) = \frac{3}{4}x^2$ ➔ $f_a''(2) = 3 > 0$, weil $a > 0$ ➔ Min.
$f_4(2) = -3$ ➔ TiP(2|–3)

<u>2006-AI</u>
1.1 $f_a'(x) = x^3 - (a+2)x^2 + 2ax$
Stellen mit waagrechter (=horizontaler) Tangente: $x^3 - (a+2)x^2 + 2ax = 0$ ➔ $x(x^2 - (a+2)x + 2a) = 0$
➔ $x_1 = 0$ oder $x^2 - (a+2)x + 2a = 0$

$$x_{2,3} = \frac{a+2 \pm \sqrt{(-(a+2))^2 - 4\cdot 1\cdot 2a}}{2\cdot 1} = \frac{a+2 \pm \sqrt{a^2 + 4a + 4 - 8a}}{2} = \frac{a+2 \pm \sqrt{a^2 - 4a + 4}}{2}$$

$$= \frac{a+2 \pm \sqrt{(a-2)^2}}{2} = \frac{a+2 \pm (a-2)}{2}$$ ➔ $x_2 = a$; $x_3 = 2$

damit der Graph von f_a einen TeP hat, muss f_a' eine doppelte Nullstelle haben; also muss $x_1 = x_2$ oder $x_1 = x_3$ oder $x_2 = x_3$ sein
$x_1 = x_2$ ➔ $a = 0$ Widerspruch zu $a > 0$!
$x_1 = x_3$ ➔ $0 = 2$ Widerspruch!
$x_2 = x_3$ ➔ $a = 2$

(oder: $f_a''(x) = 3x^2 - 2(a+2)x + 2a$; $f_a''(0) = 2a \neq 0$, weil $a > 0$ ➔ bei 0 ist kein TeP;

$f_a''(a) = ... = a^2 - 2a = a\,(a - 2) = 0$ für $a = 0$ (nicht möglich wegen $a > 0$) oder $a = 2$;
$f_a''(2) = \ldots = 4 - 2a = 0$ für $a = 2$;
insgesamt: für $a = 2$ könnte bei $x_2 = x_3 = 2$ ein WeP sein; da man dort auch waagrechte Tangente hat, könnte dort also ein TeP sein;
$f_2'''(x) = 6x - 8$; $f_2'''(2) = 4 \neq 0$ ➔ Wendestelle ➔ tatsächlich TeP)

<u>2007-AI</u>

1.1 $\frac{1}{3}(x^3 - 2kx^2 + k^2x) = 0$ ➔ $\frac{1}{3}x\cdot(x^2 - 2kx + k^2) = 0$ ➔ $\frac{1}{3}x\cdot(x - k)^2 = 0$
➔ $x_1 = 0$; $x_{2,3} = k$

1) $k = 0$: $x_{1,2,3} = 0$ dreifach
2) sonst, also $k > 0$: $x_1 = 0$ einfach; $x_{2,3} = k$ doppelt

1.2 $f_k'(x) = \frac{1}{3}(3x^2 - 4kx + k^2)$; $f_k''(x) = \frac{1}{3}(6x - 4k)$
Flachstellen: $\frac{1}{3}(6x - 4k) = 0$ ➔ $x_1 = \frac{2}{3}k$
Graph von f_k'' skizzieren *(steigende Gerade!) ......*
➔ G_f ist rechtsgekrümmt in $]-\infty; \frac{2}{3}k]$, linksgekrümmt in $[\frac{2}{3}k; \infty[$
bei $\frac{2}{3}k$ wechselt also die Krümmung ➔ Wendestelle
$f_k(\frac{2}{3}k) = ... = \frac{2}{81}k^3$ ➔ WeP$(\frac{2}{3}k|\frac{2}{81}k^3)$

1.3 $f_k'(\frac{2}{3}k) = \ldots = -\frac{1}{9}k^2$ ➔ $t\!: y = -\frac{1}{9}k^2 \cdot (x - \frac{2}{3}k) + \frac{2}{81}k^3$ ➔ $t: y = -\frac{1}{9}k^2\,x + \frac{8}{81}k^3$
(mit Tangenten-Formel aus Merkhilfe!)

<u>2007-AII</u>

1.1 Nullstellen: $\frac{1}{8}(x^2 - k)\,(x^2 - 4) = 0$ ➔ $x^2 = k$ oder $x^2 = 4$
$k < 0$ ➔ $x^2 = k$ hat keine Lösung; $x^2 = 4$ ➔ $x_{1,2} = \pm 2$ beide einfach
➔ Der Graph schneidet die x-Achse zweimal und berührt sie nirgends.

1.2 $f_k(x) = \frac{1}{8}(x^4 - kx^2 - 4x^2 + 4k) = \frac{1}{8}(x^4 - (k+4)x^2 + 4k)$
für alle k: nur gerade Exponenten ➔ Graph ist symmetrisch zur y-Achse
(*oder:* $f_k(-x) = \frac{1}{8}(\,(-x)^2 - k)\,((-x)^2 - 4) = \frac{1}{8}(x^2 - k)\,(x^2 - 4) = f_k(x)$
➔ für alle k ist der Graph symmetrisch zur y-Achse)

1.3 $f_k'(x) = \frac{1}{8}(4x^3 - 2(k+4)x)$
Stellen mit waagrechter Tangente: $\frac{1}{8}(4x^3 - 2(k+4)x) = 0$ ➔ $\frac{1}{4}x\cdot(2x^2 - (k+4)) = 0$
➔ $x_1 = 0$ oder $2x^2 = k+4$ ➔ $x^2 = \dfrac{k+4}{2}$

1) $k < -4$: $x_1 = 0$ ($x_{2,3}$ existieren nicht)
2) $k = -4$: $x_{1,2,3} = 0$
3) $k > -4$: $x_1 = 0$; $x_{2,3} = \pm\sqrt{\dfrac{k+4}{2}}$