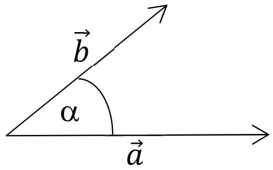
Produkte von zwei Vektoren

a) Skalarprodukt (auch: Punktprodukt, inneres Produkt)
Definition: $\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$, wobei α der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eingeschlossene Winkel ist:



Das Ergebnis ist ein **Skalar** (eine Zahl)!

Rechenregeln:

- $\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{a}$ (Kommutativgesetz)
- $\lambda(\vec{a} \circ \vec{b}) = (\lambda\,\vec{a}) \circ \vec{b}$ („gemischtes" Assoziativgesetz; Vorsicht: zwei verschiedene Produkte!)
- $\vec{a} \circ (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \circ \vec{c}$ (Distributivgesetz)

Berechnung aus den Komponenten: $\vec{a} \circ \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 (+ \cdots)$

eingeschlossener Winkel: $\cos\alpha = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

Orthogonalität: $\vec{a} \perp \vec{b}$ genau dann, wenn $\vec{a} \circ \vec{b} = 0$

b) Vektorprodukt (auch: Kreuzprodukt, äußeres Produkt)

Definition: $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$

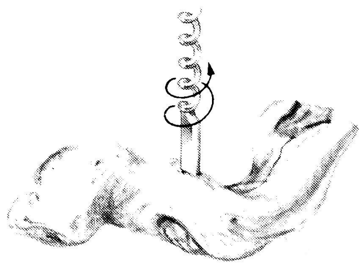
Das Ergebnis ist ein **Vektor**!

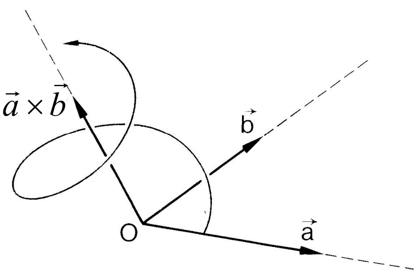
Trick zur Berechnung: Erste Zeile streichen, die nächsten beiden Zeilen „über Kreuz" rechnen (wie bei Turbo-Gauß), dann die gestrichene Zeile unten anfügen usw.

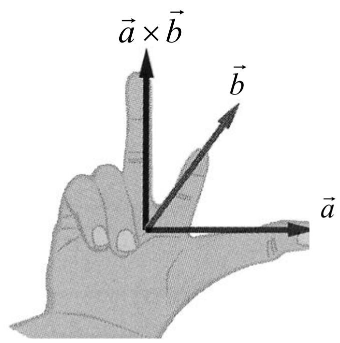
$$\begin{array}{cc} \cancel{-1} & \cancel{2} \\ \cancel{2} & \cancel{-4} \\ -2 & 4 \\ -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eigenschaften / Rechenregeln:

- $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ bilden ein „Rechtssystem", d. h.: dreht man $\vec{a}$ auf dem kürzesten Weg zu $\vec{b}$, so zeigt $\vec{a} \times \vec{b}$ in Richtung einer Rechtsschraube; alternativ: Hält man bei der rechten Hand den Daumen in Richtung von $\vec{a}$ und den Zeigefinger in Richtung von $\vec{b}$, so zeigt der Mittelfinger, wenn man ihn senkrecht zur Handfläche hält, in Richtung von $\vec{a} \times \vec{b}$:







- $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ („Anti-Kommutativgesetz“); die Reihenfolge ist also wichtig!
- $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ (Distributivgesetz)
- $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ („gemischtes Assoziativgesetz“)
- dagegen gilt ***nicht*** ein Assoziativgesetz der Form $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$!
- $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\alpha$ für $0 \leq \alpha \leq 180°$

Flächenberechnung:

- $|\vec{a} \times \vec{b}|$ ist der Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ „aufgespannten‘‘ Parallelogramms
- $\frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$ ist der Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ „aufgespannten‘‘ Dreiecks
- Jedes Vieleck kann in Dreiecke zerlegt werden. ➔ Der Flächeninhalt jedes Vielecks kann berechnet werden, wenn die Eckpunkte bekannt sind.