Potenzsummen

1) $\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\ldots+n-1+n$

Schreibt man die Summe folgendermaßen um:

$$(1+n)+(2+(n-1))+(3+(n-2))+\ldots$$

(also erster Summand plus letzter, zweiter plus vorletzter usw.), so fällt auf, dass jeder einzelne Summand jeweils n + 1 ergibt, also:

$$\sum_{k=1}^{n} k = (n+1)+(n+1)+(n+1)+\ldots$$

Von diesen Summanden gibt es, wie man leicht abzählt, insgesamt n/2 Stück (wenn n gerade ist; im anderen Fall wird die Argumentation ein wenig komplizierter). Also:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n}{2}\cdot(n+1) = \frac{n\cdot(n+1)}{2} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

q.e.d.

(*Anmerkung: darauf kam der berühmte Mathematiker Gauß angeblich schon in der Grundschule... siehe aber auch https://www.americanscientist.org/article/gausss-day-of-reckoning.*)

2) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2+n^2$

Schaut man sich die Formel in (1) noch einmal an, so sieht man, dass sich für die Summe der Zahlen von 1 bis n ein quadratischer Term in n ergibt. Naheliegend ist also die Vermutung, dass die Summe der Quadratzahlen von 1^2 bis n^2 einen kubischen Term in n ergibt:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = a_3n^3 + a_2n^2 + a_1n + a_0$$

mit noch unbekannten Zahlen a_3, a_2, a_1, a_0. Dann muss aber auch gelten:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = a_3(n+1)^3 + a_2(n+1)^2 + a_1(n+1) + a_0$$

Andererseits gilt nach Definition des Summensymbols:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2$$

Also folgt: $a_3(n+1)^3 + a_2(n+1)^2 + a_1(n+1) + a_0 = a_3n^3 + a_2n^2 + a_1n + a_0 + (n+1)^2$

Binomische Formeln anwenden:

$$a_3(n^3+3n^2+3n+1) + a_2(n^2+2n+1) + a_1(n+1) + a_0 = a_3n^3 + a_2n^2 + a_1n + a_0 + n^2 + 2n + 1$$

Alles nach links bringen und die Terme nach Potenzen von n ordnen:

$$(3a_3-1)n^2 + (3a_3+2a_2-2)n + a_3 + a_2 + a_1 - 1 = 0$$

Da diese Gleichung für alle Werte von n gelten muss, folgt:

$$3a_3 - 1 = 0 \quad \text{und} \quad 3a_3 + 2a_2 - 2 = 0 \quad \text{und} \quad a_3 + a_2 + a_1 - 1 = 0$$

Dieses LGS hat die Lösungen $a_3 = 1/3$, $a_2 = 1/2$, $a_1 = 1/6$. Also ergibt sich:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n + a_0$$

a_0 ist noch unbekannt. Betrachte dafür den Spezialfall n = 1: $1^2 = \sum_{k=1}^{1} k^2 = \frac{1}{3}\cdot 1^3 + \frac{1}{2}\cdot 1^2 + \frac{1}{6}\cdot 1 + a_0$

Es ergibt sich $a_0 = 0$, also:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \ldots = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

q.e.d.

Die höheren Potenzsummen können ähnlich berechnet werden.

Alternativ kann man auch die ,,Bernoulli-Zahlen‘‘ verwenden… ausführlich erklärt hier:
https://www.youtube.com/watch?v=fw1kRz83Fj0

Oder noch eine Alternative:
https://www.youtube.com/watch?v=z25imPmrxR0