# Natürlicher Logarithmus und Arcustangens als „unendliche Polynome" (Potenzreihen)

Vorarbeit: Zunächst zeigt man, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \neq 1$ gilt:

$$\frac{x^{n+1}-1}{x-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1} + x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k.$$

Das kann man entweder mit Polynomdivision machen – oder man kürzt die Summe $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1} + x^n$ erst mal mit $S$ ab und sieht dann, dass $x \cdot S = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1} + x^{n+1} = S - 1 + x^{n+1}$ ist. Aus dieser Gleichung kann man dann $S = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$ ausrechnen.

Falls $-1 < x < 1$ gilt, wird $x^n$ (betragsmäßig) immer kleiner, je größer $n$ wird. Dann kann man den Grenzwert der Formel oben für $n \to \infty$ betrachten: $x^{n+1}$ geht gegen null, und die Summe auf der rechten Seite geht dann unendlich weiter (konvergiert aber gegen einen endlichen Wert!), also

$$\frac{-1}{x-1} = 1 + x + x^2 + x^3 \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

bzw.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

Ersetzen wir nun noch darin x durch –x, dann haben wir:

$$\tfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \textstyle\sum_{k=0}^{\infty}(-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k \quad (*)$$

Integrieren wir nun beide Seiten (dass das funktioniert, müsste man eigentlich erst noch beweisen…), dann erhalten wir

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}}$$

Da die Formel (*) oben nur für $-1 < x < 1$ gilt, ist auch diese Formel nur für diese x-Werte richtig! Aber damit kann man eben nun den natürlichen Logarithmus ln(z) für alle $0 < z < 2$ berechnen. (Genauso berechnet jeder Taschenrechner letztlich Logarithmen!) Und obwohl (*) für x = 1 und x = –1 nicht funktioniert, klappt die Logarithmusformel sogar für x = 1 (auch das müsste man beweisen…), d. h. es gilt:

$$\ln(2) = \ln(1+1) = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \cdots = -\textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

Andererseits können wir in (*) das x auch durch $-x^2$ ersetzen und erhalten dann:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^k}{k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{k}$$

Wieder können wir beide Seiten integrieren und erhalten diesmal:

$$\boxed{\arctan(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}}$$

Wieder gilt diese Formel eigentlich nur für $-1 < x < 1$ (und wieder: jeder Taschenrechner verwendet das, um den Arcustangens zu berechnen!), und wieder kann man beweisen, dass sie trotzdem auch für x = 1 funktioniert. Also haben wir:

$$\arctan(1) = \tfrac{\pi}{4} = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \cdots = \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

*Das letztere Ergebnis kann man auch ohne Differenzial- und Integralrechnung zeigen, mithilfe einer geometrischen Argumentation und Kombinatorik:*
*[https://www.youtube.com/watch?v=00w8gu2aL-w](https://www.youtube.com/watch?v=00w8gu2aL-w)*