Ziel ist es letztlich, Brüche zu kürzen. Beispiel: $(x^3+4x^2+5x+2):(x+1)$ ist dasselbe wie $\frac{x^3+4x^2+5x+2}{x+1}$-

Damit man hier den Faktor $(x+1)$ kürzen kann, muss man schauen, wie oft er in den Zähler reinpasst. Zunächst ist es dafür sinnvoll, zu schauen, wie oft der Faktor in die ersten beiden Summanden (x^3+4x^2) reinpasst. Und dafür ist es wiederum sinnvoll, zu schauen, wie oft eigentlich das x in das x^3 reinpasst, sprich: der erste Rechenschritt ist $x^3: x = x^2$. Das sagt uns nun: Damit wir in den ersten beiden Summanden (x^3+4x^2) den Faktor $(x+1)$ kürzen können, müssen wir dort erst mal x^2 ausklammern. Wenn wir aus (x^3+4x^2) das x^2 ausklammern, dann erhalten wir aber $(x+4)$ statt $(x+1)$, das stimmt also noch nicht so ganz. Wir müssen uns also ausrechnen, was statt (x^3+4x^2) da stehen müsste, damit nach dem Ausklammern eben $(x+1)$ übrig bleibt, sprich: der zweite Rechenschritt ist $(x+1)\cdot x^2 = x^3+x^2$. Im Zähler steht aber eben (x^3+4x^2), nicht (x^3+x^2), da steht also momentan noch zu viel. Wir müssen uns also noch ausrechnen, um wie viel das eigentlich zuviel ist, sprich: der dritte Rechenschritt ist $(x^3+4x^2)-(x^3+x^2)=3x^2$. Das sind genau die drei Rechenschritte, die man bei der Polynomdivision macht!

Das kann man auch folgendermaßen schreiben (die drei oben erwähnten Rechenschritte kann man im Kopf machen oder sich irgendwo als Nebenrechnungen hinschreiben):

$$\frac{x^3+4x^2+5x+2}{x+1} = \frac{x^3+x^2+3x^2+5x+2}{x+1} = \frac{x^2(x+1)+3x^2+5x+2}{x+1}$$

Damit sind die ersten beiden Summanden erledigt. Weiter geht es mit den nächsten beiden der noch übrigen Summanden, also $(3x^2+5x)$. Wieder müssen wir herausbekommen, was wir da machen müssen, damit wir $(x+1)$ kürzen können. Wieder ist der erste Rechenschritt: Wir schauen erst mal, wie oft das x eigentlich in die $3x^2$ rein passt (denn genau das müssen wir dann ja ausklammern): $3x^2: x = 3x$. Wieder gilt aber: wenn wir aus $(3x^2+5x)$ nun einfach $3x$ ausklammern würden, dann würden wir $\left(x+\frac{5}{3}\right)$ erhalten statt $(x+1)$. Wieder müssen wir uns ausrechnen, was da eigentlich stehen müsste, damit nach dem Ausklammern $(x+1)$ übrig bleibt: $(x+1)\cdot 3x = 3x^2+3x$. Wieder: Statt $(3x^2+3x)$ steht da aber $(3x^2+5x)$, also zuviel. Um wie viel zuviel? Um $(3x^2+5x)-(3x^2+3x)=2x$. Wieder waren das genau dieselben Rechenschritte wie bei der Polynomdivision. Und wieder könnte man das stattdessen auch so schreiben:

$$\frac{x^2(x+1)+3x^2+5x+2}{x+1} = \frac{x^2(x+1)+3x^2+3x+2x+2}{x+1} = \frac{x^2(x+1)+3x(x+1)+2x+2}{x+1}$$

Übrig bleiben noch die beiden Summanden $(2x+2)$. Hier könnte man nun einfach direkt 2 ausklammern und wäre quasi fertig. Man kann es aber wieder langsam rechnen: Zunächst schauen wir, wie oft das x in die $2x$ reinpasst, also $2x: x = 2$. Wieder schauen wir, was da stehen müsste, damit nach dem Ausklammern der 2 tatsächlich $(x+1)$ übrig bleibt: $(x+1)\cdot 2 = 2x+2$. Jetzt sieht man eigentlich schon, dass es aufgeht, wir können aber als dritten Schritt wieder überprüfen, was denn nun noch zuviel wäre, wenn wir diese $(2x+2)$ verwenden würden: $(2x+2)-(2x+2)=0$. Es ist also nichts mehr zuviel, sondern geht genau auf – und wieder haben wir genau die drei Rechenschritte von der Polynomdivision. Als Bruch geschrieben:

$$\frac{x^2(x+1)+3x(x+1)+2x+2}{x+1} = \frac{x^2(x+1)+3x(x+1)+2(x+1)+0}{x+1}$$

Als letztes müssten wir nun aber noch insgesamt den gemeinsamen Faktor $(x+1)$ ausklammern, damit wir auch wirklich kürzen können:

$$\frac{x^2(x+1)+3x(x+1)+2(x+1)+0}{x+1} = \frac{(x^2+3x+2)(x+1)}{x+1} = x^2+3x+2.$$

Und damit ist der Bruch gekürzt; das Endergebnis ist natürlich genau dasselbe wie bei der Polynomdivision.