

## Partialbruchzerlegung bei mehrfachen linearen Faktoren

Satz: Kommt ein Linearfaktor im Nenner in der  $k$ -ten Potenz vor, so muss man in der Partialbruchzerlegung Summanden für *jede* Potenz von 1 bis  $k$  verwenden:

$$\frac{p(x)}{(x-x_1)^k \dots} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-x_1)^k} + \dots$$

(alternativ: nur die  $k$ -Potenz verwenden, den Zähler aber vom Grad  $k-1$  ansetzen – meist schwieriger!)

$$\frac{p(x)}{(x-x_1)^k \dots} = \frac{A_{k-1}x^{k-1} + A_{k-2}x^{k-2} + \dots + A_1x + A_0}{(x-x_1)^k} + \dots$$

Hier muss man nun außer den Definitionslücken einfach noch andere, beliebige  $x$ -Werte einsetzen!

Beispiel:  $\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{B}{x+1} \rightarrow 1 = A_1 x(x+1) + A_2(x+1) + Bx^2$

$x = 0 \rightarrow 1 = A_2$

$x = -1 \rightarrow 1 = B$

z. B.  $x = 1 \rightarrow 1 = 2A_1 + 2A_2 + B \rightarrow A_1 = -1$

$\rightarrow \int \frac{1}{x^2(x+1)} dx = \int \left( -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1} \right) dx = -\ln|x| - \frac{1}{x} + \ln|x+1| + C = \ln \left| \frac{x+1}{x} \right| - \frac{1}{x} + C$

alternativ:  $\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{A_1x+A_0}{x^2} + \frac{B}{x+1} \rightarrow 1 = (A_1x + A_0)(x+1) + Bx^2$

$x = 0 \rightarrow 1 = A_0$

$x = -1 \rightarrow 1 = B$

$x = 1 \rightarrow 1 = 2(A_1 + A_0) + B \rightarrow A_1 = -1$

$\rightarrow \int \frac{1}{x^2(x+1)} dx = \int \left( \frac{-x+1}{x^2} + \frac{1}{x+1} \right) dx = \dots$

## Partialbruchzerlegung bei quadratischen Faktoren

Satz: Kommt ein quadratischer Faktor im Nenner vor, so muss man in der Partialbruchzerlegung den Nenner linear ansetzen:

$$\frac{p(x)}{(ax^2+bx+c) \dots} = \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} + \dots$$

Beispiel:  $\frac{1}{(x^2+1)x} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x} \rightarrow 1 = Ax^2 + Bx + C(x^2+1)$

$x = 0 \rightarrow 1 = C$

z. B.  $x = 1 \rightarrow 1 = A + B + 2C \rightarrow A + B = -1$

z. B.  $x = -1 \rightarrow 1 = A - B + 2C \rightarrow A - B = -1$

$\rightarrow A = -1; B = 0$

$\rightarrow \int \frac{1}{(x^2+1)x} dx = \int \left( \frac{-x}{x^2+1} + \frac{1}{x} \right) dx = -\frac{1}{2} \ln|x^2+1| + \ln|x| + C = \ln \frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} + C$