Partialbruchzerlegung bei mehrfachen linearen Faktoren

Satz: Kommt ein Linearfaktor im Nenner in der *k*-ten Potenz vor, so muss man in der Partialbruchzerlegung Summanden für *jede* Potenz von 1 bis *k* verwenden:

$$\frac{p(x)}{(x-x_1)^k\cdot\ldots}=\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{(x-x_1)^2}+\cdots\frac{A_k}{(x-x_1)^k}+\cdots$$

(alternativ: nur die *k*. Potenz verwenden, den Zähler aber vom Grad $k-1$ ansetzen – meist schwieriger!

$$\frac{p(x)}{(x-x_1)^k\cdot\ldots}=\frac{A_{k-1}x^{k-1}+A_{k-2}x^{k-2}+\cdots+A_1x+A_0}{(x-x_1)^k}+\cdots$$)

Hier muss man nun außer den Definitionslücken einfach noch andere, beliebige x-Werte einsetzen! Stattdessen kann man auch zusätzlich Ableitungen verwenden (pro zusätzliche Vielfachheit einer Nullstelle je eine mehr) und in diese die Definitionslücken einsetzen.

Beispiel: $\frac{1}{x^2(x+1)}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{B}{x+1}$ ➔ $1 = A_1\, x\,(x+1) + A_2\,(x+1) + B\,x^2$ (*)

$x = 0$ ➔ $1 = A_2$

$x = -1$ ➔ $1 = B$

z. B. $x = 1$ ➔ $1 = 2A_1 + 2A_2 + B$ ➔ $A_1 = -1$

(*alternativ:* (*) ableiten: $0 = A_1\,(2x+1) + A_2 + 2\,B\,x$; $x = 0$ ➔ $0 = A_1 + A_2$ ➔ $A_1 = -1$)

➔ $\int\frac{1}{x^2(x+1)}dx=\int\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x+1}\right)dx=-\ln|x|-\frac{1}{x}+\ln|x+1|+C=\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|-\frac{1}{x}+C$

alternativ: $\frac{1}{x^2(x+1)}=\frac{A_1x+A_0}{x^2}+\frac{B}{x+1}$ ➔ $1 = (A_1x + A_0)\,(x + 1) + B\,x^2$

$x = 0$ ➔ $1 = A_0$

$x = -1$ ➔ $1 = B$

$x = 1$ ➔ $1 = 2\,(A_1 + A_0) + B$ ➔ $A_1 = -1$

➔ $\int\frac{1}{x^2(x+1)}dx=\int\left(\frac{-x+1}{x^2}+\frac{1}{x+1}\right)dx=\cdots$

Partialbruchzerlegung bei quadratischen Faktoren

Satz: Kommt ein quadratischer Faktor im Nenner vor, so muss man in der Partialbruchzerlegung den entsprechenden Zähler linear ansetzen:

$$\frac{p(x)}{(ax^2+bx+c)\cdot\ldots}=\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}+\cdots$$

Beispiel: $\frac{1}{(x^2+1)x}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x}$ ➔ $1 = Ax^2 + Bx + C(x^2+1)$ (*)

$x = 0$ ➔ $1 = C$

z. B. $x = 1$ ➔ $1 = A + B + 2C$ ➔ $A + B = -1$

z. B. $x = -1$ ➔ $1 = A - B + 2C$ ➔ $A - B = -1$

➔ $A = -1$; $B = 0$

(*alternativ:* (*) mehrfach ableiten:

(*)‘ $0 = 2Ax + B + 2Cx$; $x = 0$ ➔ $B = 0$

(*)‘‘ $0 = 2A + 2C$; $x = 0$ ➔ $A = -C = -1$)

➔ $\int\frac{1}{(x^2+1)x}dx=\int\left(\frac{-x}{x^2+1}+\frac{1}{x}\right)dx=-\frac{1}{2}\ln|x^2+1|+\ln|x|+C=\ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}+C$