

Beweis: Die Partialbruchzerlegung klappt immer

Zunächst nur für den Fall, dass der Nenner zwei unterschiedliche Nullstellen hat:

Der Nenner ist dann vom Grad 2, und somit kann der Zähler höchstens vom Grad 1 sein; wir können den Funktionsterm dann also schreiben als

$$f(x) = \frac{ax + b}{(x - x_1)(x - x_2)}$$

Dafür setzen wir wie üblich die Partialbruchzerlegung an:

$$\frac{ax + b}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2},$$

und bringen die Summe rechts zunächst auf den Hauptnenner:

$$\frac{ax + b}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{A(x - x_2) + B(x - x_1)}{(x - x_1)(x - x_2)}$$

Damit die beiden Funktionen für alle Werte von x übereinstimmen, müssen wir also nur noch erreichen, dass die beiden Zählerfunktionen für alle x übereinstimmen:

$$ax + b = A(x - x_2) + B(x - x_1)$$

Um A und B zu bestimmen, setzen wir nun bekanntlich Werte für x ein, am einfachsten die Nullstellen des Nenners (und das führt natürlich auch immer auf eine Lösung, denn dabei fällt immer einer der beiden Summanden rechts weg, und der andere hat dann jeweils einen Faktor ungleich null, weil die Nullstellen ja unterschiedlich sind).

Die genaue Rechnung sparen wir uns hier. Das Wesentliche ist, dass die beiden Funktionen links und rechts nun eben an zwei Stellen übereinstimmen. Links und rechts steht aber jeweils eine lineare Funktion, also wird jeweils eine Gerade beschrieben. Wir haben also zwei Geraden, die in zwei Punkten miteinander übereinstimmen. Offensichtlich müssen dafür die beiden Geraden aber identisch sein – also stimmen die Funktionen links und rechts für alle Werte von x überein.

q.e.d.

Im allgemeinen Fall (n verschiedene Linearfaktoren im Nenner) haben wir eine Funktion der Form

$$f(x) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i}{\prod_{k=1}^n (x - x_k)}$$

und setzen die Partialbruchzerlegung an als

$$\frac{\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i}{\prod_{k=1}^n (x - x_k)} = \sum_{j=1}^n \frac{A_j}{x - x_j}$$

Wieder erweitern wir rechts:

$$\frac{\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i}{\prod_{k=1}^n (x - x_k)} = \sum_{j=1}^n \frac{A_j \cdot \prod_{k=1; k \neq j}^n (x - x_k)}{\prod_{k=1}^n (x - x_k)}$$

Und wieder ist nur noch zu zeigen, dass die Zählerfunktionen übereinstimmen:

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i = \sum_{j=1}^n A_j \cdot \prod_{k=1; k \neq j}^n (x - x_k)$$

Wieder bestimmen wir die Koeffizienten A_j durch Einsetzen der Nullstellen des Nenners. Dabei fallen dann jeweils alle Summanden bis auf einen weg. (Wenn man $x = x_l$ einsetzt, dann fallen alle Summanden weg, in denen $j \neq l$ ist, nur der mit $j = l$ bleibt stehen, weil dieser als Einziger keinen Faktor $(x_l - x_l)$ enthält – denn in dem zugehörigen Produkt ist ja dann $k \neq l$ vorausgesetzt.) Damit erhalten wir also wieder eine eindeutige Lösung.

Außerdem stimmen die beiden Zähler dann an n verschiedenen Stellen überein – und daraus folgt, dass die Zählerfunktionen *überall* übereinstimmen müssen! Das sieht man so: Weil die beiden Zählerfunktionen an n verschiedenen Stellen übereinstimmen, hat ihre Differenz (mindestens) n verschiedene Nullstellen. Beide Zähler sind aber jeweils Polynome vom Grad n-1, ihre Differenz muss also auch ein Polynom von höchstens Grad n-1 sein. Also kann ihre Differenz eigentlich höchstens n-1 Nullstellen haben – im Widerspruch zu dem, was wir eben gezeigt haben. Damit bleibt nur noch eine Möglichkeit übrig: Die Differenz muss die Nullfunktion sein (überall den Wert 0 haben) – und daraus folgt wiederum, dass die beiden Zählerfunktionen *überall* übereinstimmen müssen.

Damit stimmen dann also die beiden Funktionsterme links und rechts *überall* überein.

q.e.d.

Bei Nennern, in denen Nullstellen mehrfach auftauchen, wird's noch ein wenig komplizierter... wir haben dann:

$$f(x) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i}{\prod_{k=1}^N (x - x_k)^{n_k}}$$

mit den Vielfachheiten n_k , wobei $\sum_{j=1}^N n_j = n$ ist, und die Partialbruchzerlegung ist

$$\frac{\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i}{\prod_{k=1}^N (x - x_k)^{n_k}} = \sum_{j=1}^N \sum_{l_j=1}^{n_j} \frac{A_{j,l_j}}{(x - x_j)^{l_j}}$$

Nach Erweitern bleibt wieder die Bedingung, dass nur die Zählerfunktionen übereinstimmen müssen:

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i = \sum_{j=1}^N \sum_{l_j=1}^{n_j} A_{j,l_j} \cdot (x - x_j)^{n_j - l_j} \cdot \prod_{k=1; k \neq j}^N (x - x_k)^{n_k}$$

Wenn man nun eine Nullstelle x_m des Nenners einsetzt, so fallen rechts alle Summanden mit $j \neq m$ weg; zusätzlich aber auch alle mit $l_j \neq n_j$; man kann damit also nur die Koeffizienten A_{m,n_m} bestimmen. Hier braucht man also einen zusätzlichen Trick: Man setzt außerdem noch voraus, dass auch diverse Ableitungen der beiden Funktionen links und rechts zumindest an den Nullstellen des Nenners übereinstimmen sollen.

Betrachte dafür einen Summanden mit festem j und l_j , also $A_{j,l_j} \cdot (x - x_j)^{n_j - l_j} \cdot \prod_{k=1; k \neq j}^N (x - x_k)^{n_k}$. Dieser hat die $n_j - l_j$ -fache Nullstelle x_j und die n_k -fachen Nullstellen x_k mit $k = 1 \dots N, k \neq j$. Leitet man diesen Summanden r mal ab, so erhält man also für $n_j - l_j - r > 0$ eine Funktion, bei welcher die Nullstelle x_j noch die Vielfachheit $n_j - l_j - r$ hat. Ist andererseits $n_j - l_j - r \leq 0$, so erhält man eine Funktion, welche die Nullstelle x_j nicht mehr hat. Es folgt: Setzt man $x = x_m$ in die r . Ableitung ein, so bleiben nur Summanden A_{m,l_m} übrig mit $l_m \geq n_m - r$.

Nun kann man induktiv vorgehen: Aus den Bedingungen, dass die Funktionen selbst bei allen Nullstellen x_m des Zählers übereinstimmen sollen, erhält man die Koeffizienten A_{m,n_m} . Die Bedingungen, dass die ersten Ableitungen dort übereinstimmen sollen, enthalten dann diese bereits bestimmten Koeffizienten A_{m,n_m} und zusätzlich die Koeffizienten A_{m,n_m-1} ; damit können dann diese berechnet werden. Die Bedingungen für die zweiten Ableitungen enthalten die bereits bestimmten Koeffizienten A_{m,n_m} und A_{m,n_m-1} und zusätzlich A_{m,n_m-2} usw. Damit können nun also *alle* Koeffizienten eindeutig berechnet werden!

Außerdem ergibt sich schließlich insgesamt : Bei jeweils einer Nullstelle x_m des Nenners mit Vielfachheit n_m stimmen sowohl die beiden Funktionen als auch die ersten $n_m - 1$ Ableitungen überein. Daraus folgt: Die Differenzfunktion hat dort eine Nullstelle mit Vielfachheit n_m . Da die Summe aller Vielfachheiten nach Voraussetzung gleich n ist, folgt wieder, dass die Differenzfunktion (mindestens) n Nullstellen haben muss – was ja aber nicht sein kann, da sie ein Polynom vom Grad höchstens $n - 1$ ist. Also folgt wieder, dass die Differenzfunktion *überall* gleich null sein muss, dass also die beiden Zählerfunktionen *überall* übereinstimmen müssen.

q.e.d.

Bei quadratischen Faktoren kann man nun argumentieren, dass diese im Komplexen wieder in Linearfaktoren zerlegbar sind, und dann klappt das Argument von oben wieder... ***Eine Begründung rein im Reellen wäre aber natürlich auch noch schön zu haben... evtl. kommt man da auch mit Ableiten weiter?***