Partialbruchzerlegung bei nur einfachen linearen Faktoren

Satz: Kann man den Nenner eines echt gebrochenrationalen Terms in unterschiedliche Linearfaktoren $x - x_1, \dots x - x_n$ zerlegen, so kann man den Term auch als Summe von Brüchen mit konstanten Zählern schreiben, in deren Nennern nur jeweils einer der Linearfaktoren steht:

$$f(x) = \frac{p(x)}{(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \ldots + \frac{A_n}{x-x_n}, \quad \text{wenn Grad}(p) < n.$$

Beispiel 1: $\frac{2x}{x^2-1} = \frac{2x}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$

Koeffizientenvergleich:

meist einfacher: x-Werte einsetzen, z. B. die Definitionslücken

Anmerkung: Das letztere Verfahren kann man auch als Formel ausdrücken: $A_i = \lim\limits_{x \to x_i}\left((x - x_i) \cdot f(x)\right)$.
(Man nennt die A_i hier auch „Residuen 1. Ordnung".) Diese Formel ist äquivalent zur „Abdeck"-Methode in https://www.youtube.com/watch?v=fgPviiv_oZs.

Beispiel 2: $\frac{1}{a^2-x^2}$

Beispiel 3: $\frac{x^3+2}{2x^3-2x}$

Partialbruchzerlegung bei mehrfachen linearen Faktoren

Satz: Kommt ein Linearfaktor im Nenner in der *k*-ten Potenz vor, so muss man in der Partialbruchzerlegung Summanden für *jede* Potenz von 1 bis *k* verwenden:

$$\frac{p(x)}{(x-x_1)^k\cdot\ldots} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \cdots \frac{A_k}{(x-x_1)^k} + \cdots$$

(alternativ: nur die *k*. Potenz verwenden, den Zähler aber vom Grad $k-1$ ansetzen – meist schwieriger!

$$\frac{p(x)}{(x-x_1)^k\cdot\ldots} = \frac{A_{k-1}x^{k-1}+A_{k-2}x^{k-2}+\cdots+A_1x+A_0}{(x-x_1)^k} + \cdots$$)

Hier muss man nun außer den Definitionslücken einfach noch andere, beliebige x-Werte einsetzen! Stattdessen kann man auch zusätzlich Ableitungen verwenden (pro zusätzliche Vielfachheit einer Nullstelle je eine mehr) und in diese die Definitionslücken einsetzen.

Beispiel: $\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{B}{x+1}$ ➔ $1 = A_1\,x\,(x+1) + A_2\,(x+1) + B\,x^2$ (*)

$x = 0$ ➔ $1 = A_2$

$x = -1$ ➔ $1 = B$

z. B. $x = 1$ ➔ $1 = 2A_1 + 2A_2 + B$ ➔ $A_1 = -1$

(*alternativ:* (*) ableiten: $0 = A_1\,(2x+1) + A_2 + 2\,B\,x$; $x = 0$ ➔ $0 = A_1 + A_2$ ➔ $A_1 = -1$)

➔ $\int \frac{1}{x^2(x+1)}dx = \int \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1}\right)dx = -\ln|x| - \frac{1}{x} + \ln|x+1| + C = \ln\left|\frac{x+1}{x}\right| - \frac{1}{x} + C$

alternativ: $\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{A_1x+A_0}{x^2} + \frac{B}{x+1}$ ➔ $1 = (A_1x + A_0)\,(x + 1) + B\,x^2$

$x = 0$ ➔ $1 = A_0$

$x = -1$ ➔ $1 = B$

$x = 1$ ➔ $1 = 2\,(A_1 + A_0) + B$ ➔ $A_1 = -1$

➔ $\int \frac{1}{x^2(x+1)}dx = \int \left(\frac{-x+1}{x^2} + \frac{1}{x+1}\right)dx = \cdots$

Partialbruchzerlegung bei quadratischen Faktoren

Satz: Kommt ein quadratischer Faktor im Nenner vor, so muss man in der Partialbruchzerlegung den entsprechenden Zähler linear ansetzen:

$$\frac{p(x)}{(ax^2+bx+c)\cdot\ldots} = \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} + \cdots$$

Beispiel: $\frac{1}{(x^2+1)x} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x}$ ➔ $1 = Ax^2 + Bx + C(x^2+1)$ (*)

$x = 0$ ➔ $1 = C$

z. B. $x = 1$ ➔ $1 = A + B + 2C$ ➔ $A + B = -1$

z. B. $x = -1$ ➔ $1 = A - B + 2C$ ➔ $A - B = -1$

➔ $A = -1$; $B = 0$

(*alternativ:* (*) mehrfach ableiten:

(*)‘ $0 = 2Ax + B + 2Cx$; $x = 0$ ➔ $B = 0$

(*)‘‘ $0 = 2A + 2C$; $x = 0$ ➔ $A = -C = -1$)

➔ $\int \frac{1}{(x^2+1)x}dx = \int \left(\frac{-x}{x^2+1} + \frac{1}{x}\right)dx = -\frac{1}{2}\ln|x^2+1| + \ln|x| + C = \ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} + C$