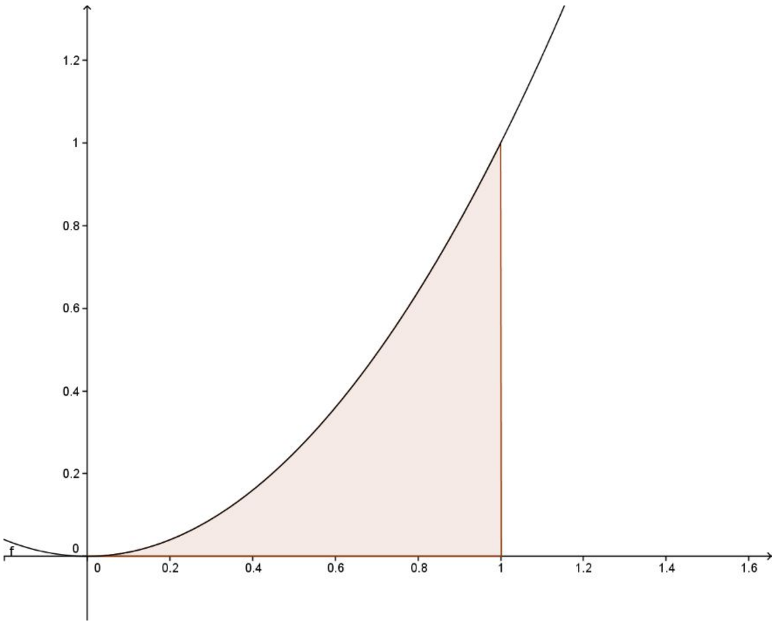
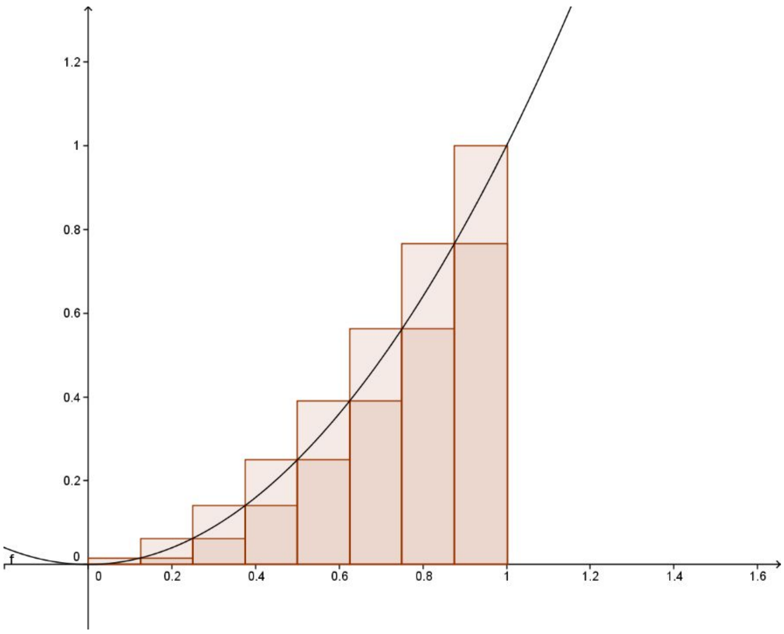
# Ober- und Untersummen

Gesucht ist der Flächeninhalt zwischen dem Graphen von f mit $f(x) = x^2$ und der x-Achse zwischen $x = 0$ und $x = 1$:




Die Idee ist nun, diese Fläche zunächst nur näherungsweise zu berechnen, indem man sie durch eine Summe von Rechtecksflächen annähert. Dafür gibt es mehrere Möglichkeiten: die Rechtecke können (z. B.) alle über den Graph hinaus gehen, aber auch alle darunter liegen. Im ersten Fall spricht man von der <u>Obersumme</u> $O_8$, im zweiten von der <u>Untersumme</u> $U_8$.




Rechnung:

$$O_8 = \frac{1}{8} \cdot f\left(\frac{1}{8}\right) + \frac{1}{8} \cdot f\left(\frac{2}{8}\right) + \cdots + \frac{1}{8} \cdot f\left(\frac{8}{8}\right) = \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^2 + \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{2}{8}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{8}{8}\right)^2$$
$$= \frac{1}{8} \cdot \frac{1^2}{8^2} + \frac{1}{8} \cdot \frac{2^2}{8^2} + \cdots + \frac{1}{8} \cdot \frac{8^2}{8^2} = \frac{1}{8^3} \cdot (1^2 + 2^2 + \cdots + 8^2) = \frac{204}{512} \approx 0{,}40$$

$$U_8 = \frac{1}{8} \cdot f\left(\frac{0}{8}\right) + \frac{1}{8} \cdot f\left(\frac{1}{8}\right) + \cdots + \frac{1}{8} \cdot f\left(\frac{7}{8}\right) = \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{0}{8}\right)^2 + \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^2$$
$$= \frac{1}{8} \cdot \frac{0^2}{8^2} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1^2}{8^2} + \cdots + \frac{1}{8} \cdot \frac{7^2}{8^2} = \frac{1}{8^3} \cdot (0^2 + 2^2 + \cdots + 7^2) = \frac{140}{512} \approx 0{,}27$$

➔ Der Flächeninhalt liegt also zwischen 0,27 und 0,40.

Zur Abkürzung verwenden wir nun das Summenzeichen Σ:

$O_8 = \sum_{k=1}^{8} \frac{1}{8} \cdot f\left(\frac{k}{8}\right) = \sum_{k=1}^{8} \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{k}{8}\right)^2 = \sum_{k=1}^{8} \frac{k^2}{8^3} = \frac{1}{512} \sum_{k=1}^{8} k^2$

In Formelsammlungen findet man die Formel $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$; damit ergibt sich also:

$O_8 = \frac{1}{512} \frac{8\cdot(8+1)\cdot(2\cdot 8+1)}{6} = \frac{1224}{3072} \approx 0{,}40$

ebenso:

$U_8 = \sum_{k=0}^{7} \frac{1}{8} \cdot f\left(\frac{k}{8}\right) = \sum_{k=0}^{7} \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{k}{8}\right)^2 = \sum_{k=0}^{7} \frac{k^2}{8^3} = \frac{1}{512} \sum_{k=1}^{7} k^2 = \frac{1}{512} \frac{7\cdot(7+1)\cdot(2\cdot 7+1)}{6} = \frac{840}{3072} \approx 0{,}27$

Um den Flächeninhalt genauer zu bestimmen, verwendet man einfach mehr Rechtecke, z. B. 16:

$$O_{16} = \sum_{k=1}^{16} \frac{1}{16} \cdot f\left(\frac{k}{16}\right) = \sum_{k=1}^{16} \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{k}{16}\right)^2 = \sum_{k=1}^{16} \frac{k^2}{16^3} = \frac{1}{4096} \sum_{k=1}^{16} k^2$$
$$= \frac{1}{4096} \frac{16\cdot(16+1)\cdot(2\cdot 16+1)}{6} = \frac{8976}{24576} \approx 0{,}365$$

$$U_{16} = \sum_{k=0}^{15} \frac{1}{16} \cdot f\left(\frac{k}{16}\right) = \sum_{k=0}^{15} \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{k}{16}\right)^2 = \sum_{k=0}^{15} \frac{k^2}{16^3} = \frac{1}{4096} \sum_{k=1}^{15} k^2$$
$$= \frac{1}{4096} \frac{15\cdot(15+1)\cdot(2\cdot 15+1)}{6} = \frac{7440}{24576} \approx 0{,}303$$

➔ Der Flächeninhalt liegt also zwischen 0,303 und 0,365.

Will man den Flächeninhalt exakt wissen, so muss die Anzahl der Rechtecke unendlich groß werden:

$$\lim_{n\to\infty} O_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6} \cdot \frac{n}{n} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{2n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(2 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 = \frac{1}{3}$$

ähnlich:

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \ldots = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(2 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 = \frac{1}{3}$$

Es ergibt sich also bei der Ober- und der Untersumme derselbe Grenzwert; also ist der Flächeninhalt gleich $\frac{1}{3}$.