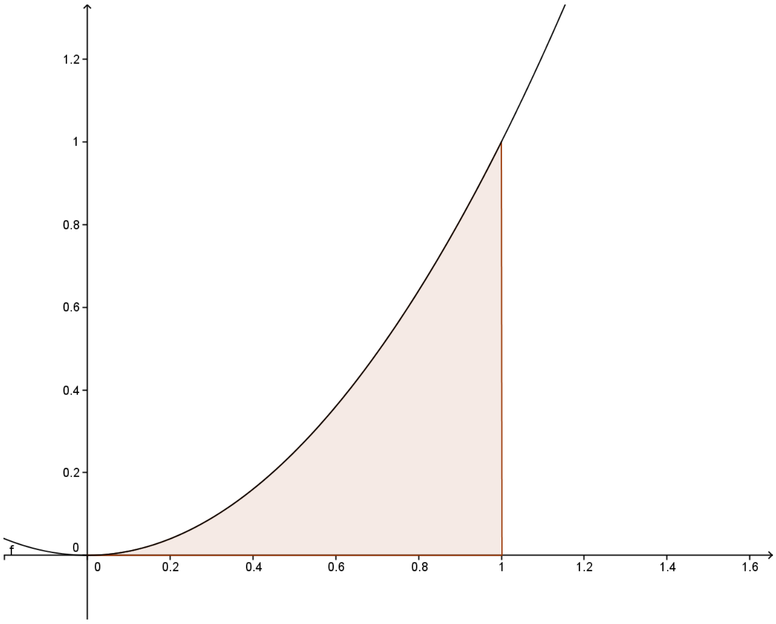
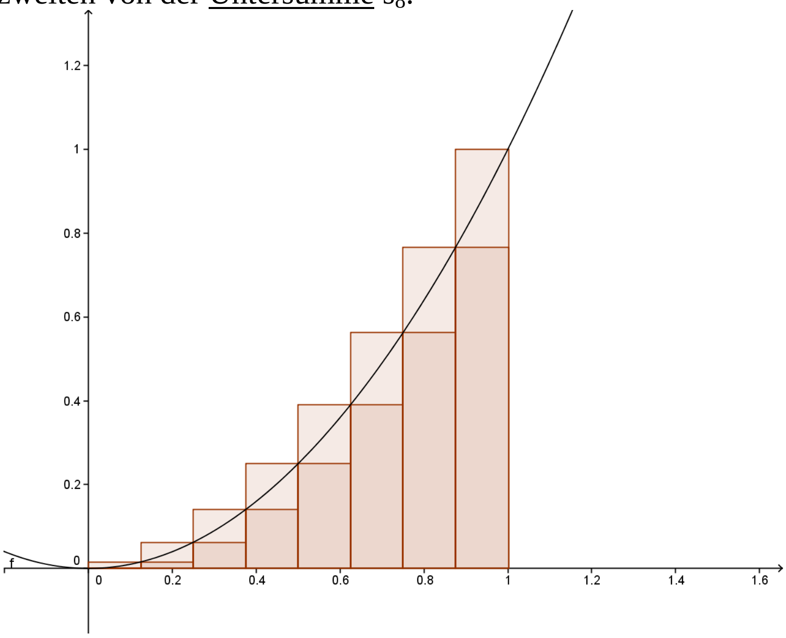
Ober- und Untersummen (und das Summenzeichen)

Gesucht ist der Flächeninhalt zwischen dem Graphen von f mit $f(x) = x^2$ und der x-Achse zwischen x = 0 und x = 1:



Die Idee ist nun, diese Fläche zunächst nur näherungsweise zu berechnen, indem man sie durch eine Summe von Rechtecksflächen annähert. Dafür gibt es mehrere Möglichkeiten: die Rechtecke können (z. B.) alle über den Graph hinaus gehen, aber auch alle darunter liegen. Im ersten Fall spricht man von der <u>Obersumme</u> S_8, im zweiten von der <u>Untersumme</u> s_8.



Rechnung:

$$S_8 = \frac{1}{8}\cdot f\left(\frac{1}{8}\right) + \frac{1}{8}\cdot f\left(\frac{2}{8}\right) + \ldots + \frac{1}{8}\cdot f\left(\frac{8}{8}\right) = \frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^2 + \frac{1}{8}\cdot\left(\frac{2}{8}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{8}\cdot\left(\frac{8}{8}\right)^2$$

$$= \frac{1}{8}\cdot\frac{1^2}{8^2} + \frac{1}{8}\cdot\frac{2^2}{8^2} + \ldots + \frac{1}{8}\cdot\frac{8^2}{8^2} = \frac{1}{8^3}\cdot\left(1^2 + 2^2 + \ldots + 8^2\right) = \frac{204}{512} \approx 0{,}40$$

$s_8 =$

➔ Der Flächeninhalt liegt also zwischen und 0,40.

Zur Abkürzung benutzt man das „Summensymbol" Σ:

Für die Summe $a_1 + a_2 + ... + a_8$ schreibt man kurz $\sum_{k=1}^{8} a_k$, für die Summe $a_m, ..., a_n$ entsprechend $\sum_{k=m}^{n} a_k$.

Beispiele:

1) $1 + 2 + ... + 10 = \sum_{k=1}^{10} k$

2) $1^2 + 2^2 + ... + 8^2 = \sum_{k=}$

3) $f(x_2) + f(x_3) + ... + f(x_7) = \sum_{k=}$

damit: $S_8 = \sum_{k=1}^{8} \frac{1}{8} \cdot f\left(\frac{k}{8}\right) = \sum_{k=1}^{8} \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{k}{8}\right)^2 = \sum_{k=1}^{8} \frac{k^2}{8^3} = \frac{1}{512} \sum_{k=1}^{8} k^2$

In Formelsammlungen findet man die Formel $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$; damit ergibt sich also:

$S_8 = \frac{1}{512} \frac{8 \cdot (8+1) \cdot (2 \cdot 8+1)}{6} = \frac{1224}{3072} \approx 0{,}40$

ebenso:

$s_8 = \sum_{k=0}^{7} \frac{1}{8} \cdot f\left(\frac{k}{8}\right) = \sum_{k=0}^{7} \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{k}{8}\right)^2 = \sum_{k=0}^{7} \frac{k^2}{8^3} = \frac{1}{512} \sum_{k=1}^{7} k^2 = \frac{1}{512} \frac{7 \cdot (7+1) \cdot (2 \cdot 7+1)}{6} = \frac{840}{3072} \approx 0{,}27$

Um den Flächeninhalt genauer zu bestimmen, verwendet man einfach mehr Rechtecke, z. B. 16:

$S_{16} =$

$s_{16} =$

➔ Der Flächeninhalt liegt also zwischen und .

Will man den Flächeninhalt exakt wissen, so muss die Anzahl der Rechtecke unendlich groß werden:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6} \cdot \frac{n}{n} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{2n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) \cdot \left(2+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 = \frac{1}{3}$$

ähnlich: $\lim_{n\to\infty} s_n = \ldots = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6} \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right) \cdot \left(2-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 = \frac{1}{3}$

Es ergibt sich also bei der Ober- und der Untersumme derselbe Grenzwert; also ist der Flächeninhalt gleich $\frac{1}{3}$.