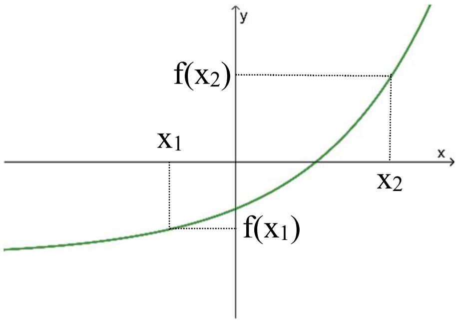
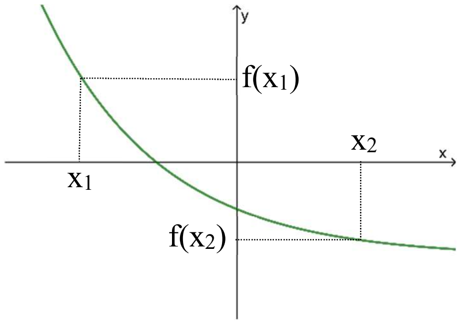
Monotonieintervalle und Punkte mit waagrechter Tangente

a) Monotonieintervalle

steigender Graph:



fallender Graph:

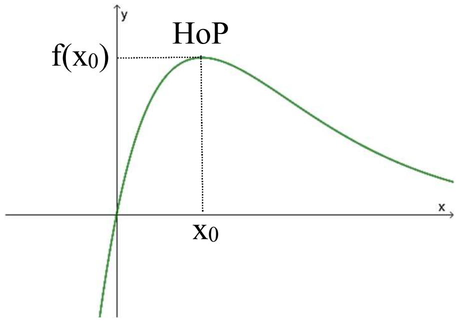


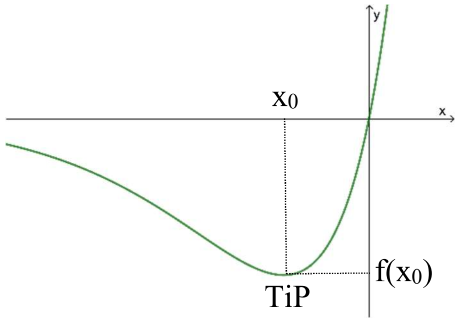
Definition: Gilt in einem Intervall [a;b] für alle x_1 und x_2 mit $x_2 > x_1$, dass $\begin{Bmatrix} f(x_2) \quad f(x_1) \\ f(x_2) \quad f(x_1) \end{Bmatrix}$ ist, so nennt man die Funktion f in [a;b] streng monoton $\begin{Bmatrix} \underline{\text{zunehmend}} \\ \underline{\text{abnehmend}} \end{Bmatrix}$ bzw. ihren Graph streng monoton $\begin{Bmatrix} \underline{\text{steigend}} \text{ (sms)} \\ \underline{\text{fallend}} \text{ (smf)} \end{Bmatrix}$. *(Statt „streng" sagt man hier manchmal auch „echt".)*

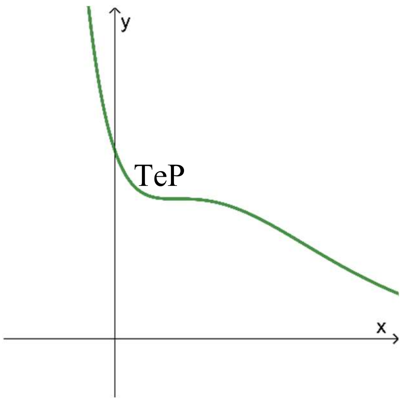
Satz: Ist f in [a;b] stetig und in]a;b[differenzierbar, so gilt: $\begin{Bmatrix} f'(x) \qquad \\ f'(x) \qquad \end{Bmatrix}$ in]a;b[➔ G_f ist streng monoton $\begin{Bmatrix} \text{steigend (sms)} \\ \text{fallend (smf)} \end{Bmatrix}$ in [a;b]

b) Waagrecht-Punkte – also Extrempunkte und Terrassenpunkte

Definitionen: Eine Stelle x_0 heißt (eigentliche) relative $\begin{Bmatrix}\text{Maximalstelle}\\ \text{Minimalstelle}\end{Bmatrix}$ einer Funktion f, wenn für alle x in der „Nachbarschaft" von x_0 die Ungleichungen $\begin{Bmatrix}f(x_0) > f(x)\\ f(x_0) < f(x)\end{Bmatrix}$ gelten. Der zugehörige Funktionswert heißt dann relatives $\begin{Bmatrix}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{Bmatrix}$(Mehrzahl: $\begin{Bmatrix}\text{Maxima}\\ \text{Minima}\end{Bmatrix}$), der Punkt $(x_0|f(x_0))$ heißt relativer $\begin{Bmatrix}\text{Hochpunkt HoP}\\ \text{Tiefpunkt TiP}\end{Bmatrix}$.
Maximal- und Minimalstellen zusammen genommen nennt man Extremalstellen, den jeweils zugehörigen Funktionswert ein Extremum (Mehrzahl: Extrema), die zugehörigen Punkte Extrempunkte ExP. (*Hinweis: Statt „relativ" steht im Buch hier „lokal".)* Eine Stelle, bei der $f'(x_0) = 0$ ist, obwohl sie keine Extremstelle ist, heißt Terrassen- (oder Sattel-) stelle, der Punkt entsprechend Terrassen- (oder Sattel-)Punkt TeP.







Satz 1: Ist $f'(x_0) = 0$ $\begin{Bmatrix}\quad\quad\end{Bmatrix}$ Vorzeichenwechsel (VZW), so ist bei x_0 ein $\begin{Bmatrix}\text{ExP}\\ \text{TeP}\end{Bmatrix}$ von G_f. Wechselt f ' dort das VZ $\begin{Bmatrix}\text{von} \quad \text{nach}\\ \text{von} \quad \text{nach}\end{Bmatrix}$, so ist bei x_0 ein relativer $\begin{Bmatrix}\text{HoP}\\ \text{TiP}\end{Bmatrix}$ von G_f.

Satz 2: Ist x_0 eine Nullstelle von f ' mit $\begin{Bmatrix}\quad\quad\end{Bmatrix}$ Vielfachheit, so ist bei x_0 ein $\begin{Bmatrix}\text{ExP}\\ \text{TeP}\end{Bmatrix}$ von G_f.