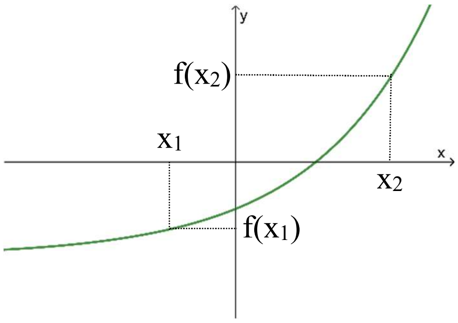
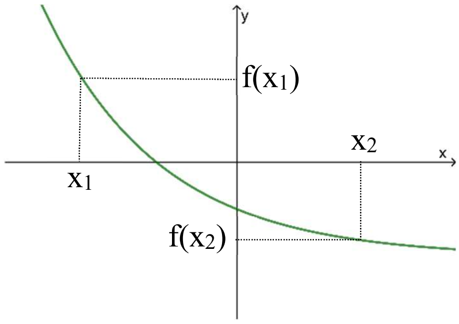
Monotonieintervalle und Punkte mit waagrechter Tangente

a) Monotonieintervalle

steigender Graph:



fallender Graph:

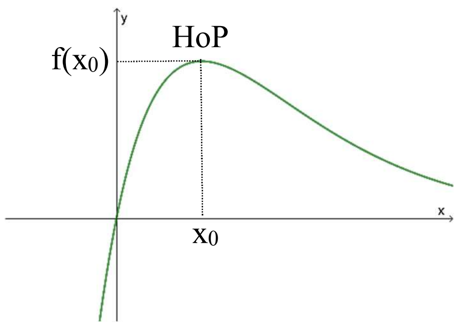


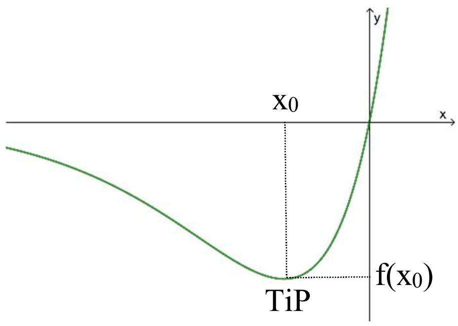
Definition: Gilt in einem Intervall [a;b] für alle x_1 und x_2 mit $x_2 > x_1$, dass $\begin{Bmatrix} f(x_2) \quad\quad f(x_1) \\ f(x_2) \quad\quad f(x_1) \end{Bmatrix}$ ist, so nennt man die Funktion f in [a;b] streng monoton $\begin{Bmatrix} \underline{\text{zunehmend}} \\ \underline{\text{abnehmend}} \end{Bmatrix}$ bzw. ihren Graph streng monoton $\begin{Bmatrix} \underline{\text{steigend}} \text{ (sms)} \\ \underline{\text{fallend}} \text{ (smf)} \end{Bmatrix}$.
(Statt „streng“ sagt man hier manchmal auch „echt“ oder „strikt“.)

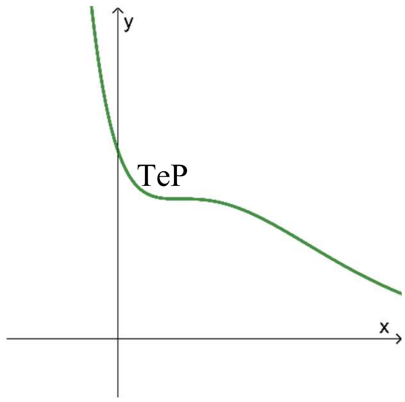
Satz: Ist f in [a;b] stetig und in]a;b[differenzierbar, so gilt:
$\begin{Bmatrix} f'(x) \quad\quad \\ f'(x) \quad\quad \end{Bmatrix}$ in]a;b[➔ G_f ist streng monoton $\begin{Bmatrix} \text{steigend (sms)} \\ \text{fallend (smf)} \end{Bmatrix}$ in [a;b]

b) Waagrecht-Punkte – also Extrempunkte und Terrassenpunkte

Definitionen: Eine Stelle x_0 heißt (eigentliche) <u>relative</u> $\begin{Bmatrix}\text{Maximalstelle}\\ \text{Minimalstelle}\end{Bmatrix}$ einer Funktion f, wenn für alle x in der „Nachbarschaft“ von x_0 die Ungleichungen $\begin{Bmatrix} f(x_0) > f(x) \\ f(x_0) < f(x) \end{Bmatrix}$ gelten. Der zugehörige Funktionswert heißt dann <u>relatives</u> $\begin{Bmatrix}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{Bmatrix}$(Mehrzahl: $\begin{Bmatrix}\text{Maxima}\\ \text{Minima}\end{Bmatrix}$), der Punkt ($x_0|f(x_0)$) heißt <u>relativer</u> $\begin{Bmatrix}\text{Hochpunkt HoP}\\ \text{Tiefpunkt TiP}\end{Bmatrix}$. Maximal- und Minimalstellen zusammen genommen nennt man <u>Extremalstellen</u>, den jeweils zugehörigen Funktionswert ein <u>Extremum</u> (Mehrzahl: Extrema), die zugehörigen Punkte <u>Extrempunkte</u> ExP. (*Hinweis: Statt „relativ“ steht im Buch hier „lokal“.)* Eine Stelle, bei der $f'(x_0) = 0$ ist, obwohl sie keine Extremstelle ist, heißt <u>Terrassen-</u> (oder Sattel-) <u>stelle</u>, der Punkt entsprechend <u>Terrassen-</u> (oder Sattel-)Punkt TeP.







Satz 1: Ist $f'(x_0) = 0 \begin{Bmatrix} \qquad \end{Bmatrix}$ Vorzeichenwechsel (VZW), so ist bei x_0 ein $\begin{Bmatrix}\text{ExP}\\ \text{TeP}\end{Bmatrix}$ von G_f. Wechselt f' dort das VZ $\begin{Bmatrix}\text{von} \quad \text{nach} \quad \\ \text{von} \quad \text{nach} \quad \end{Bmatrix}$, so ist bei x_0 ein relativer $\begin{Bmatrix}\text{HoP}\\ \text{TiP}\end{Bmatrix}$ von G_f.

Satz 2: Ist x_0 eine Nullstelle von f' mit $\begin{Bmatrix} \qquad \\ \qquad \end{Bmatrix}$ Vielfachheit, so ist bei x_0 ein $\begin{Bmatrix}\text{ExP}\\ \text{TeP}\end{Bmatrix}$ von G_f.