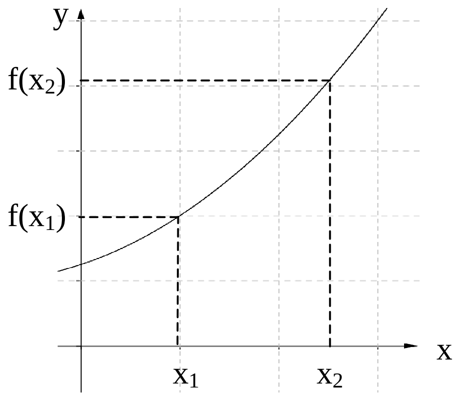
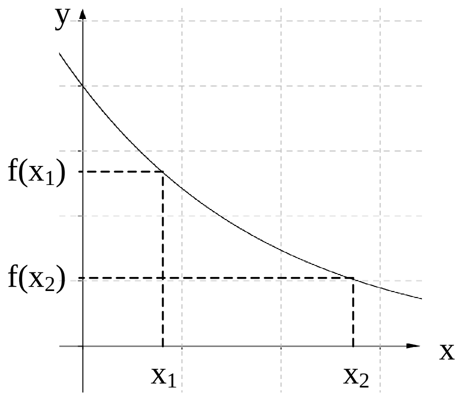
Monotonie

Bei linearen Funktionen kann man bekanntlich direkt am Funktionsterm ablesen, ob die zugehörigen Graphen (Geraden) steigen oder fallen. Wie dies bei anderen Funktionen machbar sein soll, ist aber erst mal unklar. Bei diesen ist im Allgemeinen außerdem zu beachten, dass ihre Graphen ja auch nicht überall gleich steigen/fallen, sondern ihr Anstieg sich ändert. Zum Beispiel fällt eine nach oben geöffnete Parabel erst, nach dem Scheitel steigt sie dann.

Hier sollen zwei Methoden betrachtet werden, wie man beliebige Funktionen darauf untersuchen kann, ob bzw. wo ihr Graph steigt/fällt; später im Schuljahr werden wir eine weitere, einfachere Methode kennen lernen.

Betrachten wir zwei Graphen – der eine steigend, der andere fallend – und auf beiden jeweils zwei x-Werte x_1 und x_2 mit $x_2 > x_1$:



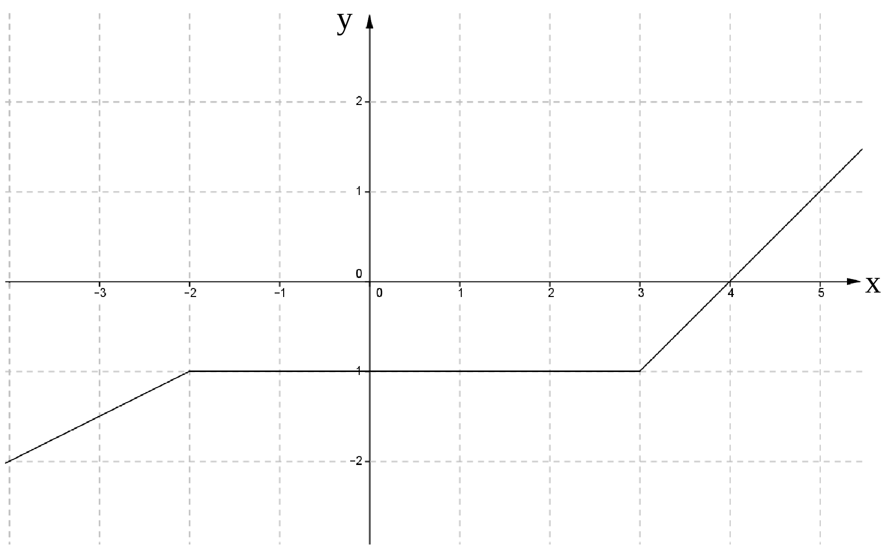


Offensichtlich gilt für beliebige $x_2 > x_1$:

$f(x_2) \quad f(x_1)$ $\qquad\qquad$ $f(x_2) \quad f(x_1)$

Definition: Eine Funktion heißt in einem Intervall I <u>streng/echt monoton</u> $\left\{\begin{matrix}\underline{\text{zunehmend}}\\ \underline{\text{abnehmend}}\end{matrix}\right\}$, wenn für alle x_1, $x_2 \in$ I mit $x_2 > x_1$ gilt, dass $\left\{\begin{matrix} \quad \\ \quad \end{matrix}\right\}$ ist. Der Graph heißt dann <u>streng/echt monoton</u> $\left\{\begin{matrix}\underline{\text{steigend}}\\ \underline{\text{fallend}}\end{matrix}\right\}$.

Anmerkung: Gilt statt bzw. nur $\geq$ bzw. $\leq$, so spricht man nur von Monotonie statt von strenger Monotonie. Beispiel:



Diese Funktion ist monoton zunehmend in , aber streng monoton zunehmend nur in

Monotonie rechnerisch zeigen:

Beispiele:

1) Behauptung: Die Funktion $f(x) = 2x+1$ ist streng monoton zunehmend in .

Beweis: Es ist zu zeigen: Für alle $x_1, x_2 \in$ mit $x_2>x_1$ gilt $f(x_2) > f(x_1)$, also $2x_2+1 > 2x_1 + 1$.
$x_2>x_1$ | $\cdot 2$ ➔ $2x_2>2x_1$ | $+1$ ➔ $2x_2+1 > 2x_1 + 1$. Das war zu zeigen.

2) Behauptung: Die Funktion $f(x) = x^2$ ist a) streng monoton zunehmend in , b) streng monoton abnehmend in .

Beweis:
a) Es ist zu zeigen: Für alle $x_1, x_2 \in$ mit $x_2>x_1$ gilt $f(x_2) > f(x_1)$, also $x_2^2 > x_1^2$.
$x_2>x_1$ | $-x_1$ ➔ $x_2 - x_1 > 0$ | $\cdot (x_2 + x_1) > 0$ ➔ $x_2^2 - x_1^2 > 0$ ➔ $x_2^2 > x_1^2$. Das war zu zeigen.

b)

Die obige Methode ist ziemlich umständlich, und selbst bei den einfachen Funktionen hier muss man schon einige Tricks verwenden, um auf das gewünschte Ergebnis zu kommen. Zum Glück geht es auch einfacher.

Satz: f ist genau dann in I streng monoton $\begin{Bmatrix}\text{zunehmend}\\ \text{abnehmend}\end{Bmatrix}$, wenn für alle $x_1, x_2 \in I$ mit $x_2 \neq x_1$ jeweils gilt, dass $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\begin{Bmatrix}>0\\ <0\end{Bmatrix}$ ist.

Ein Beweis findet sich im Buch. Man kann diesen Satz aber auch einfach anschaulich begründen:
$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ ist die Steigung der durch die beiden Punkte $P_1(x_1|f(x_1))$ und $P_1(x_2|f(x_2))$.

Der Satz besagt also: Sind alle des Funktionsgraphen $\begin{Bmatrix}\text{steigend}\\ \text{fallend}\end{Bmatrix}$, so ist auch der Graph selbst $\begin{Bmatrix}\text{steigend}\\ \text{fallend}\end{Bmatrix}$.

in den Beispielen oben:
1) $f(x) = 2x+1$
$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{(2x_2+1)-(2x_1+1)}{x_2-x_1} = \frac{2x_2-2x_1}{x_2-x_1} = \frac{2(x_2-x_1)}{x_2-x_1} = 2 > 0 \text{ für alle } x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ mit } x_2 \neq x_1.$$
➔ Der Graph ist streng monoton zunehmend in ganz $\mathbb{R}$.

2) $f(x) = x^2$
$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{x_2^2-x_1^2}{x_2-x_1} = \frac{(x_2-x_1)(x_2+x_1)}{x_2-x_1} = x_2 + x_1$$
Für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_0^+$ mit $x_2 \neq x_1$ ist $x_2 + x_1 > 0$. ➔ Der Graph ist streng monoton steigend in $\mathbb{R}_0^+$.
Für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_0^-$ mit $x_2 \neq x_1$ ist $x_2 + x_1 < 0$. ➔ Der Graph ist streng monoton fallend in $\mathbb{R}_0^-$.