144/1

b) $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}=3\neq 0$ ➔ Schnitt; sin φ = $\left|\frac{3}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}}\right|$ ➔ φ = 60°

g∩E: 1 + λ - 2 (–λ) + 2 – 3 = 0 ➔ λ = 0 ➔ S(1;0;2)

c) P auf g wählen, z. B. für λ = 1: P(2;–1;2) (Aufpunkt spiegeln ergibt keinen Sinn, weil in E!)

$\ell:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$; $\ell\cap E:$ 2 + μ – 2 (–1 – 2μ) + 2 + μ – 3 = 0 ➔ μ = -0,5 ➔ L(1,5;0;1,5)

$\overrightarrow{PL}=\begin{pmatrix}-0{,}5\\1\\-0{,}5\end{pmatrix}=\overrightarrow{LP'}$ ➔ P'(1;1;1) (alternativ: μ = 2·(-0,5) = -1 in ℓ einsetzen) ➔ g': $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+\lambda'\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

144/2

b) $\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}=-7\neq 0$ ➔ Schnitt; sin φ = $\left|\frac{-7}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{14}}\right|$ ➔ φ ≈ 56,8°

g∩E: –2 (2 + 2λ) + 1 + 3 (–1 – λ) – 8 = 0 ➔ λ = –2 ➔ S(–2;1;1)

c) $\ell:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$

$\ell\cap E:$ –2 (2 – 2μ) + 1 + μ + 3 (–1 + 3μ) – 8 = 0 ➔ μ = 1 ➔ L(0;2;2) ➔ $\bar{g}:\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}+\nu\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$

144/3

b) Richtungsvektoren sind parallel; Aufpunkt von h in g? $\begin{pmatrix}3\\4\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\4\\7\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-2\\6\\3\end{pmatrix}$ ➔ $\begin{pmatrix}-2\\0\\8\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}-2\\6\\3\end{pmatrix}$

keine Lösung ➔ Aufpunkt von h nicht in g ➔ g und h nicht identisch, sondern echt parallel

c) Richtungsvektoren von E = Richtungsvektor von g und Vektor von einem Aufpunkt zum anderen:

$\vec{u}=\begin{pmatrix}-2\\6\\3\end{pmatrix}$; $\vec{v}=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}-2\\6\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-4\\12\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}3\\-2\\6\end{pmatrix}$

➔ 3 x_1 – 2 x_2 + 6 x_3 – c = 0; Aufpunkt von g einsetzen ➔ c = 49 ➔ E: 3 x_1 – 2 x_2 + 6 x_3 – 49 = 0

d) $\ell:\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+\nu\begin{pmatrix}3\\-2\\6\end{pmatrix}$; $\ell\cap E:$ 9 ν + 4 ν + 36 ν – 49 = 0 ➔ ν = 1 ➔ S(3;–2;6)

145/4

b) parallel? $\begin{pmatrix}5\\2a\\-a\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}2.,5\\2\\-1\end{pmatrix}$ ➔ k = 2, a = 2; Aufpunkt von h in g_2? $\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}5\\4\\-2\end{pmatrix}$ ➔

$\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}5\\4\\-2\end{pmatrix}$ ➔ keine Lösung ➔ h und g_2 sind nicht identisch, also echt parallel

$a \neq 2$: Richtungsvektoren und Vektor von einem Aufpunkt zum anderen komplanar?

$\det\begin{pmatrix}5 & 2{,}5 & -2\\2a & 2 & -1\\-a & -1 & 1\end{pmatrix}$ = … = 5 – 2,5a $\neq 0$ für a $\neq 2$ ➔ nicht komplanar ➔ h und g_a sind windschief

c) nur möglich, wenn Richtungsvektor von h senkrecht zu Richtungsvektor von g_a, also wenn

$\begin{pmatrix}5\\2a\\-a\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}2{,}5\\2\\-1\end{pmatrix}=0$ ➔ a = –2,5 ➔ $\vec{n}=\begin{pmatrix}5\\-5\\2{,}5\end{pmatrix}$

➔ $5\,x_1 - 5\,x_2 + 2{,}5\,x_3 + c = 0$; Aufpunkt von h liegt in E ➔ c = -10 ➔ E: $5\,x_1 - 5\,x_2 + 2{,}5\,x_3 - 10 = 0$

145/5

b) g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}4\\-3\\2\end{pmatrix}$ c) $g\cap E$: $2 + 4\lambda + 2\,(2 - 3\lambda) - 2\lambda - 10 = 0$ ➔ $\lambda = -1$ ➔ S(–2;5;–2)

d) $\ell:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$; $\ell\cap E$: $2 + \mu + 2\,(2 + 2\mu) + \mu - 10 = 0$ ➔ $\mu = 2/3$ ➔ L(8/3;10/3;–2/3)

➔ $\bar{g}:\vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\5\\-2\end{pmatrix}+\nu\begin{pmatrix}14\\-5\\4\end{pmatrix}$

145/6

6.1 Vektor vom Aufpunkt von g zu A: $\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$; nicht parallel zum Richtungsvektor von g

➔ die beiden Vektoren spannen eine Ebene auf: E: $\vec{x}=\begin{pmatrix}-3\\1\\-2\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ ➔ $\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-3\\-5\end{pmatrix}$

➔ $6\,x_1 - 3\,x_2 - 5\,x_3 + c = 0$; Aufpunkt einsetzen ➔ c = 11 ➔ E: $6\,x_1 - 3\,x_2 - 5\,x_3 + 11 = 0$ (I)

6.2 F: $\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}-2\\3\\-2\end{pmatrix}\right]\circ\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=0$ ➔ $x_3 + 2 = 0$ (II)

6.3 $E\cap F$: (II) ➔ $x_3 = -2$; in (I): $6\,x_1 - 3\,x_2 + 10 + 11 = 0$; wähle $x_1 = \nu$ ➔ $x_2 = 7 + 2\nu$

➔ s: $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\7\\-2\end{pmatrix}+\nu\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$

145/7

7.1 linear abhängig heißt hier komplanar: $\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & a\end{pmatrix} = ... = a - 4$ ➔ komplanar für a = 4

7.2 F_a: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\2\\-1+a\end{pmatrix}$; $\vec{n} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\2\\-1+a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a-5\\2\\-1\end{pmatrix}$

➔ $(a-5)\,x_1 + 2\,x_2 - x_3 + c = 0$; Aufpunkt einsetzen ➔ $c = -a + 4$ ➔ F_a: $(a-5)\,x_1 + 2\,x_2 - x_3 - a + 4 = 0$

7.3 Normalenvektoren parallel? $\begin{pmatrix}a-5\\2\\-1\end{pmatrix} = k\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ ➔ keine Lösung ➔ Ebenen nicht parallel

7.4 $\begin{pmatrix}a-5\\2\\-1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 0$ ➔ a = 4 ➔ F_4: $-x_1 + 2\,x_2 - x_3 = 0$ schneidet E senkrecht

7.5 $E \cap F_4$: $x_1 + x_2 + x_3 + 3 = 0$ (I) und $-x_1 + 2\,x_2 - x_3 = 0$ (II)
(I) + (II): $3\,x_2 + 3 = 0$ ➔ $x_2 = -1$; in (I): $x_1 + x_3 + 2 = 0$

$x_3 = \nu$ ➔ $x_1 = -2 - \nu$ ➔ s: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix} + \nu\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

146/8

b) B_k beschreibt eine Gerade: $\overrightarrow{OB_k} = \begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix} + k\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ (also die Gerade g!)

c) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$; $\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$ ➔ E: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} = 0$ ➔ $2\,x_1 - x_2 + 2 = 0$

d) linear unabhängig heißt hier nicht komplanar: $\det\begin{pmatrix}0 & k-1 & 1\\ 2 & 2k & 4\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix} = ... = -2 \neq 0$ für alle k

e) $M_{AC}(0{,}5;3;1)$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ ➔ H: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix}0{,}5\\3\\1\end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = 0$ ➔ $2\,x_1 + 4\,x_2 - 13 = 0$

f) $E \cap H$: $2\,x_1 - x_2 + 2 = 0$ (I) und $2\,x_1 + 4\,x_2 - 13 = 0$ (II)
(I) – (II): $-5\,x_2 + 15 = 0$ ➔ $x_2 = 3$; in (I): $x_1 = 0{,}5$

$x_3 = \nu$ ➔ h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0{,}5\\3\\0\end{pmatrix} + \nu\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC}$ ist nach Konstruktion senkrecht zu H, A und C liegen aber beide in E ➔ E ist senkrecht zu H (rechnerisch: Skalarprodukt der Normalenvektoren ist gleich 0), also: Schnittwinkel 90°

146/9

b) $\begin{pmatrix}-3\\2\\-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-4\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1+a\\-a\\2a\end{pmatrix}$ ➔ $\begin{pmatrix}-4\\2\\-3\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1+a\\-a\\2a\end{pmatrix}$ ➔ keine Lösung ➔ P liegt auf keiner der Geraden

c) g_a und h sind für kein a parallel (oder identisch); auf windschief überprüfen:

$\det\begin{pmatrix}2 & 1 & 1+a\\-3 & 0 & -a\\8 & -1 & 2a\end{pmatrix}$ = ... = 3 – a ➔ für a = 3 sind g_a und h nicht windschief, schneiden sich also

d) $\begin{pmatrix}1+a\\-a\\2a\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ = –1 – a ➔ für a = –1 ist g_a parallel zu E, ansonsten schneidet sie E

e) g_{-5}: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\-4\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-4\\5\\-10\end{pmatrix}$; Schnitt: –1 + 4λ + 10λ – 4 – 10λ – 7 = 0 ➔ λ = 3 ➔ S(–11;15;–34)

$\sin\varphi=\left|\dfrac{4+10-10}{\sqrt{(-4)^2+5^2+(-10)^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+2^2+1^2}}\right|$ ➔ $\varphi\approx 7{,}9°$

f) $\ell:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\-4\end{pmatrix}+\nu\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$; $\ell\cap E$: –1 + ν + 4ν – 4 + ν – 7 = 0 ➔ ν = 2 ➔ L(-1;4;–2)

➔ $\bar{g}_{-5}:\vec{x}=\begin{pmatrix}-11\\15\\-34\end{pmatrix}+\nu\begin{pmatrix}10\\-11\\32\end{pmatrix}$

146/10

b) Richtungsvektor parallel zu Normalenvektor? $\begin{pmatrix}-2\\k\\1\end{pmatrix}=a\cdot\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ ➔ keine Lösung

c) $\begin{pmatrix}-2\\k\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ = 0 ➔ k = –2/3

d) F: $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-4\\2\\3\end{pmatrix}$; $\vec{n}=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-4\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$

➔ $x_1 + 2x_2 + c = 0$; Aufpunkt einsetzen ➔ c = –2 ➔ F: $x_1 + 2x_2 - 2 = 0$

e) E ∩ F: $2x_1 - 3x_2 + x_3 - 4 = 0$ (I) und $x_1 + 2x_2 - 2 = 0$ (II)

$x_2 = \nu$; in (II) ➔ $x_1 = 2 - 2\nu$; in (I) ➔ $x_3 = 7\nu$ ➔ s: $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}+\nu\begin{pmatrix}-2\\1\\7\end{pmatrix}$

f) P auf g_1 wählen, z. B. für λ = 1: P(0;1;1) (Aufpunkt spiegeln ergibt keinen Sinn, weil in E!)

$\ell:\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\nu\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$; $\ell\cap E$: 4 ν – 3 + 9 ν + 1 + ν – 4 = 0 ➔ ν = 3/7 ➔ L(6/7;–2/7;10/7)

➔ $\overrightarrow{PL} = \begin{pmatrix} 6/7 \\ -9/7 \\ 3/7 \end{pmatrix} = \overrightarrow{LP'}$ ➔ P'(12/7;–11/7;13/7) (bzw. ν = 2·3/7 in ℓ einsetzen)➔ g_1': $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ -13 \end{pmatrix}$

147/11

b) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 \\ 42 \\ -21 \end{pmatrix} = -21 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ➔ E: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right] \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

➔ E: $x_1 - 2\,x_2 + x_3 - 2 = 0$

c) Richtungsvektor senkrecht zu Normalenvektor: $\begin{pmatrix} -2 \\ b \\ 6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ ➔ b = 2

Aufpunkt in E: 3 – 2a + 3 – 2 = 0 ➔ a = 4

d) sin φ = $\left| \dfrac{2+2-8}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-8)^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}} \right|$ ➔ φ ≈ 11,3°

e) Q(9;–1;–21)

$\ell : \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ -21 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\ell \cap E$: 9 + ν + 2 + 4ν – 21 + ν – 2 = 0 ➔ ν = 2 ➔ L(11;–5;-19)

➔ $\overrightarrow{QL} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{LQ'}$ ➔ Q'(13;–9;–17) (bzw. ν = 2·2 in ℓ einsetzen)

147/12

b) E || x_3-Achse, da $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; sin φ_1 = $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ ➔ $\varphi_1 \approx 26{,}6°$; sin φ_2 = $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ ➔ $\varphi_2 \approx 63{,}4°$

c) Richtungsvektor senkrecht zu Normalenvektor: $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2a \\ 6 \\ 3-3a \end{pmatrix} = 0$ ➔ a = 5; Aufpunkt von g in F_5 einsetzen ➔ 16 = 0; Widerspruch ➔ Aufpunkt nicht in F_5 ➔ g nicht in F_5, sondern echt parallel dazu

d) Normalenvektoren parallel? $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 2a \\ 6 \\ 3-3a \end{pmatrix}$ ➔ keine Lösung

e) cos φ = $\left| \dfrac{-2-12+0}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 0^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 6^2 + 6^2}} \right|$ ➔ φ ≈ 44,1°

$E \cap F_{-1}$: $x_1 - 2\,x_2 + 3 = 0$ (I) und $-2\,x_1 + 6\,x_2 + 6\,x_3 - 12 = 0$ (II)

$x_2 = 3\,\nu$; in (I) ➔ $x_1 = -3 + 6\nu$; in (I) ➔ $x_3 = 1 - \nu$ ➔ s: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

147/13

b) $x_1 = x_2 = 0$ einsetzen: $-(a + 2)\,x_3 + 12 = 0$ ➔ $x_3 = \dfrac{12}{a+2}$ für $a \neq -2$ ➔ $S_a\left(0;0;\dfrac{12}{a+2}\right)$

➔ kein Schnittpunkt für $a = -2$, d. h. F_{-2} ist parallel zur x_3-Achse

c) $x_3 = 0$ ➔ $3\,x_1 + 2\,x_2 + 12 = 0$

$x_1 = 2\lambda$ ➔ $x_2 = -6 - 3\lambda$ ➔ s: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) Die Schnittgerade s hängt nicht von a ab ➔ alle Ebenen F_a schneiden die x_1-x_2-Ebene in derselben Geraden s ➔ alle Ebenen F_a schneiden sich in s.