263/1a

$\mathbb{D} =]-\infty; 1[$; keine einfache Symmetrie; Nullstelle: $x_1 = 0$

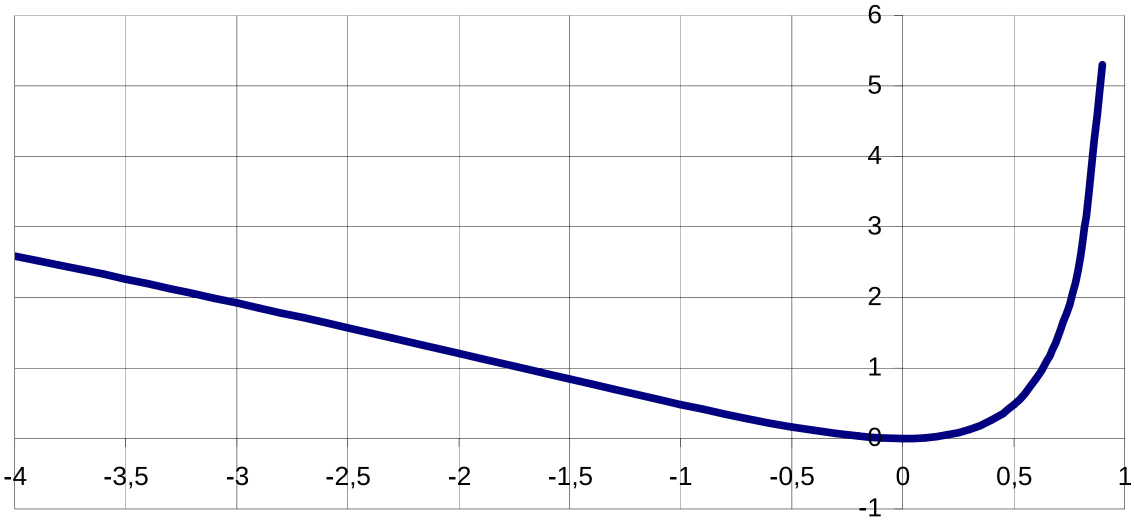
$f(x) \rightarrow +\infty$ für $x \rightarrow +\infty$ und für $x \rightarrow 1$ ➔ senkrechte Asymptote: $x = 1$

$f'(x) = \dfrac{2\ln(1-x)}{x-1}$; $f'(x) = 0$ für $x_2 = 1$; $f'(x) > 0$ (str. m. st.) in $]0;1[$, $f'(x) < 0$ (str. m. f.) in $]-\infty; 0[$

(Nenner ist in $\mathbb{D} < 0$, Zähler wechselt bei 1 sein Vorzeichen von + nach –) ➔ T(0|0)

$f''(x) = \dfrac{2 - 2\ln(1-x)}{(x-1)^2}$; $f''(x) = 0$ für $x_3 = 1-e$; $f''(x) > 0$ (L) für $x > 1-e$, $f''(x) < 0$ (R) für $x < 1-e$

(Nenner ist immer > 0, Zähler wechselt bei 1 – e sein Vorzeichen von – nach +) ➔ W(1–e|1)



263/1b

$\mathbb{D} = \mathbb{R}^+$; keine einfache Symmetrie; Nullstelle: $x_1 = 1$

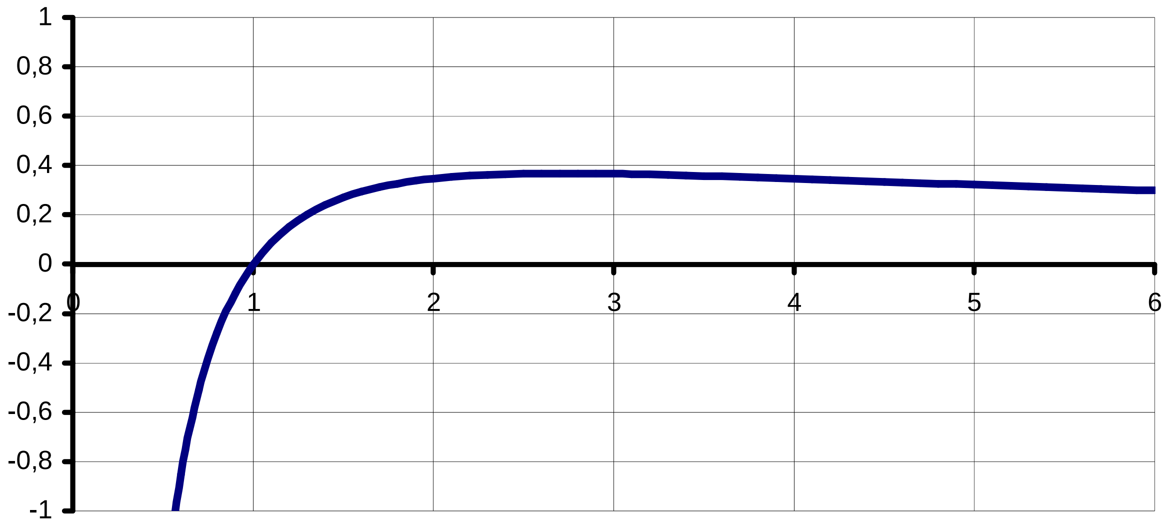
$g(x) \rightarrow -\infty$ für $x \rightarrow 0$; $g(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \infty$ (L'Hopital!) ➔ w. A.: x-Achse, s. A.: y-Achse

$g'(x) = \dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$; $g'(x) = 0$ für $x_2 = e$; $g'(x) > 0$ (str. m. st.) in $]0;e[$, $g'(x) < 0$ (str. m. f.) in $]e; \infty[$

(Nenner ist immer > 0, Zähler wechselt bei e sein Vorzeichen von + nach –) ➔ H(e|1/e)

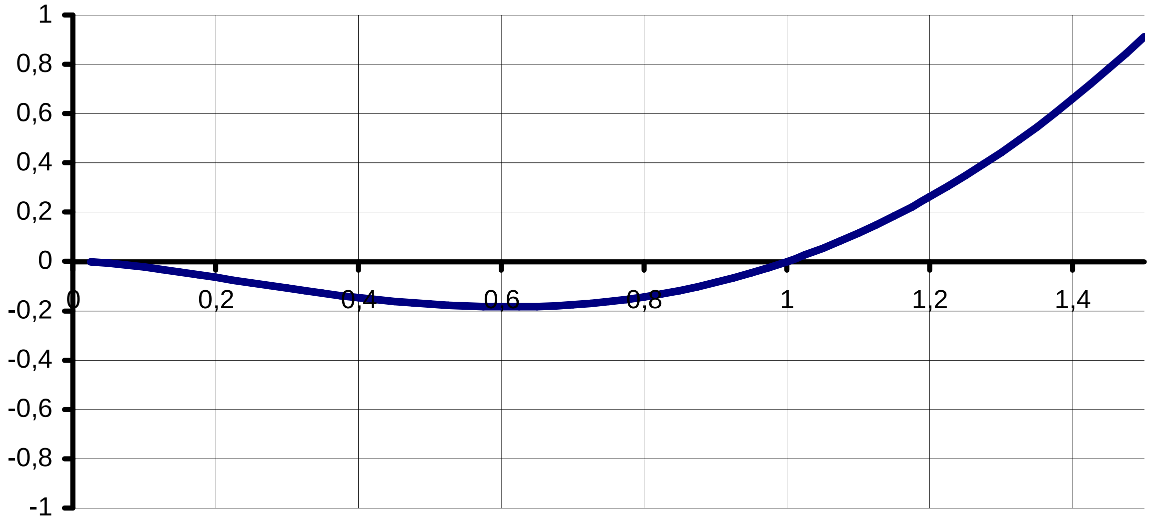
$g''(x) = \dfrac{2\ln(x)-3}{x^3}$; $g''(x) = 0$ für $x_3 = e^{1,5}$; $g''(x) > 0$ (L) für $x > e^{1,5}$, $g''(x) < 0$ (R) für $x < e^{1,5}$

(Nenner ist in $\mathbb{D} > 0$, Zähler wechselt bei $e^{1,5}$ sein Vorzeichen von – nach +) ➔ W($e^{1,5}$|1,5 $e^{-1,5}$)



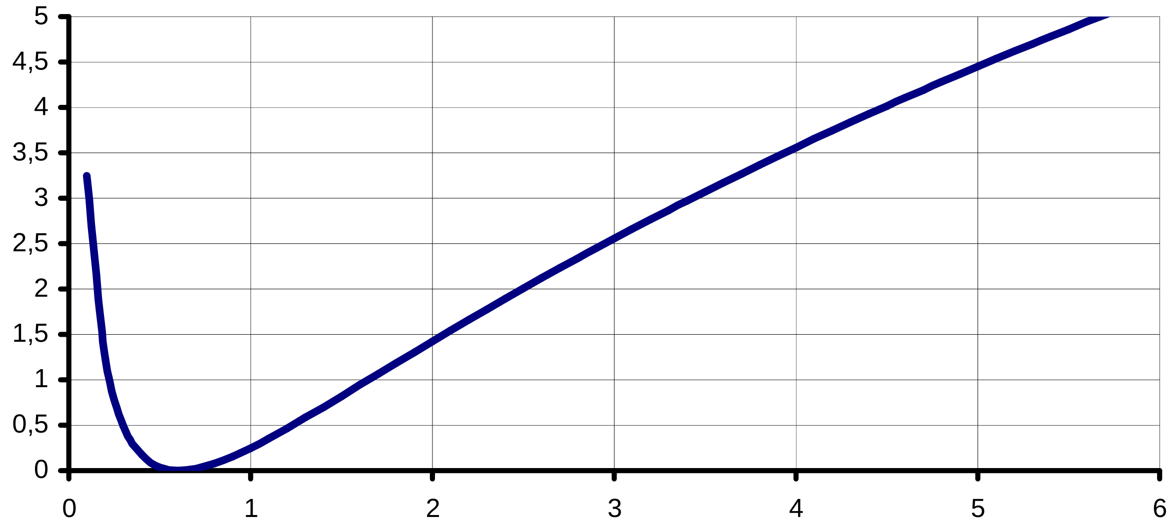
263/1c

$\mathbb{D} = \mathbb{R}^+$; keine einfache Symmetrie; Nullstelle: $x_1 = 1$
$h(x) \rightarrow -\infty$ für $x \rightarrow \infty$; $g(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow 0$ (L'Hopital!) ➔ stetig behebb. Def.lücke: $x_2 = 0$
$h'(x) = x\,(2 \ln x + 1)$; $h'(x) = 0$ für $x_3 = e^{-0,5}$
$h'(x) < 0$ (str. m. st.) in $]0;e^{-0,5}[$, $h'(x) < 0$ (str. m. f.) in $]e^{-0,5};\infty[$ ➔ $T(e^{-0,5}|-0,5/e)$
(in $\mathbb{D}$ ist $x > 0$, der Klammerterm wechselt bei $e^{-0,5}$ sein Vorzeichen von – nach +)
$h''(x) = 2 \ln x + 3$; $h''(x) = 0$ für $x_4 = e^{-1,5}$; $h''(x) > 0$ (L) für $x > e^{-1,5}$, $h''(x) < 0$ (R) für $x < e^{-1,5}$
(Term wechselt bei $e^{-1,5}$ sein Vorzeichen von – nach +) ➔ $W(e^{-1,5}|-1,5/e^3)$



263/1d

$\mathbb{D} = \mathbb{R}^+$; keine einfache Symmetrie; Nullstelle: $x_1 = e^{-0,5}$
$g(x) \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow 0$ und für $x \rightarrow \infty$ ➔ senkrechte Asymptote: y-Achse
$g'(x) = \dfrac{1 + 2\ln(x)}{x}$; $g'(x) = 0$ für $x_2 = e^{-0,5}$
$g'(x) > 0$ (str. m. st.) für $x > e^{-0,5}$, $g'(x) < 0$ (str. m. f.) für $x < e^{-0,5}$ ➔ $T(e^{-0,5}|0)$
(Nenner ist in $\mathbb{D} > 0$, Zähler wechselt bei $e^{-0,5}$ sein Vorzeichen von – nach +)
$g''(x) = \dfrac{1 - 2\ln(x)}{x^2}$; $g''(x) = 0$ für $x_3 = e^{0,5}$; $g''(x) > 0$ (L) für $x < e^{0,5}$, $g''(x) < 0$ (R) für $x > e^{0,5}$
(Nenner ist immer > 0, Zähler wechselt bei $e^{0,5}$ sein Vorzeichen von + nach –) ➔ $W(e^{0,5}|1)$



263/1e

$\mathbb{D} = \mathbb{R}^+$; keine einfache Symmetrie; Nullstelle: $x_1 = e^2/2$

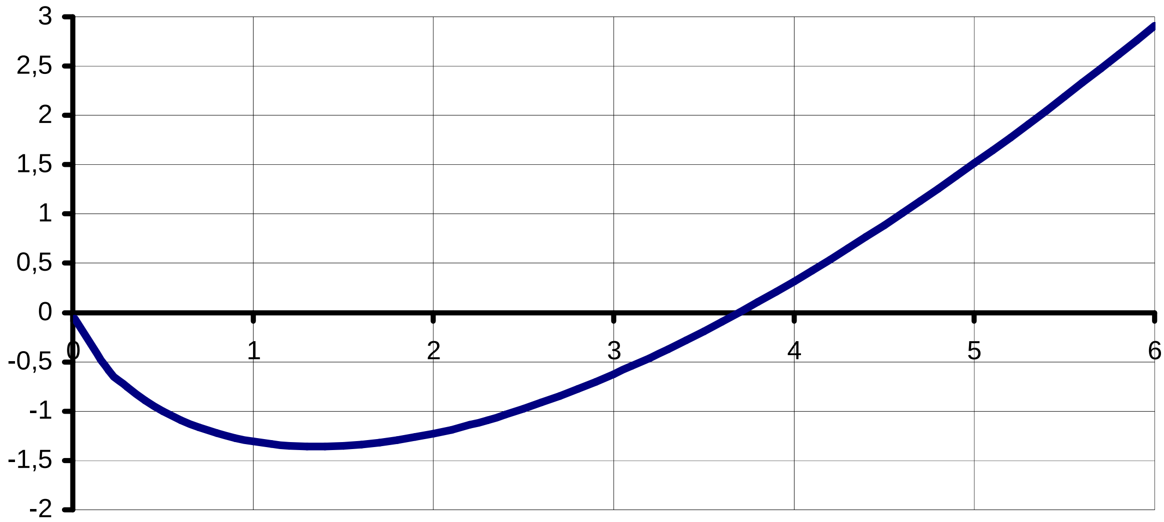
$h(x) \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow \infty$; $h(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow 0$ (L'Hopital) ➔ stetig behebbare Def.lücke $x_2 = 0$

$h'(x) = \ln(2x) - 1$; $h'(x) = 0$ für $x_3 = e/2$

$h'(x) > 0$ (str. m. st.) für $x > e/2$, $h'(x) < 0$ (str. m. f.) für $x < e/2$ ➔ $T(e/2|-e/2)$

(Term wechselt bei e/2 sein Vorzeichen von – nach +)

$h''(x) = \frac{1}{x} > 0$ (L) in ganz $\mathbb{D}$ ➔ kein Wendepunkt



263/1f

$\mathbb{D} =]-3;3[$; Nullstelle: $x_1 = 0$

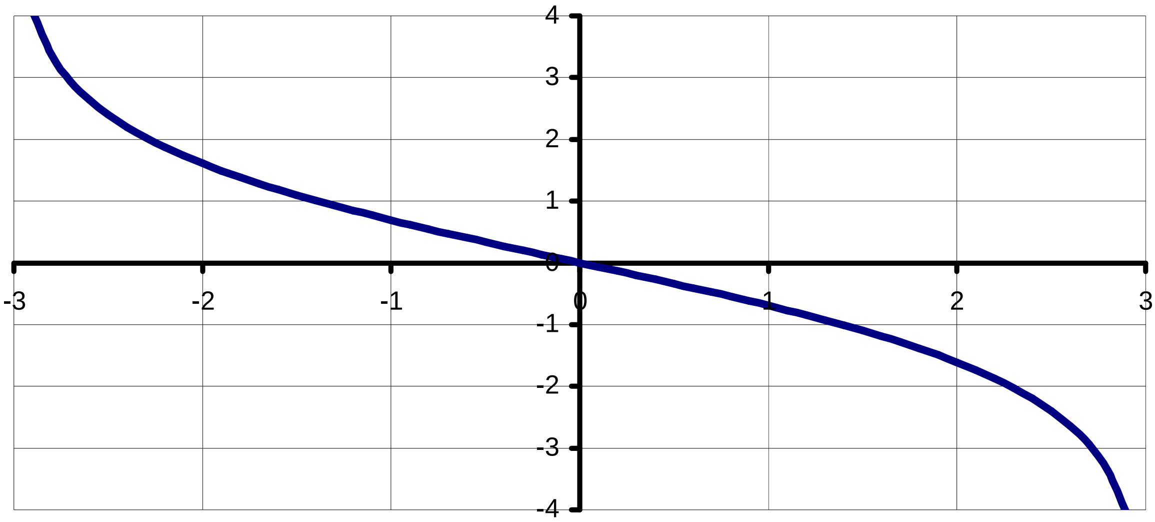
$g(-x) = \ln\left(\frac{3+x}{3-x}\right) = \ln\left(\frac{3-x}{3+x}\right)^{-1} = -\ln\left(\frac{3-x}{3+x}\right) = -g(x)$ ➔ symmetrisch zum Ursprung

$g(x) \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow -3$; $g(x) \rightarrow -\infty$ für $x \rightarrow 3$ ➔ senkrechte Asymptoten $x = -3$ und $x = 3$

$g'(x) = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+3} = \frac{6}{x^2-9} < 0$ (str. m. f.) in ganz $\mathbb{D}$ ➔ keine Hoch-/Tiefpunkte

$g''(x) = \frac{-12x}{(x^2-9)^2}$; $g''(x) = 0$ für $x = 0$; $g''(x) < 0$ für $x > 0$; $g''(x) > 0$ für $x < 0$

(Nenner ist immer > 0, Zähler wechselt bei 0 sein Vorzeichen von + nach –) ➔ W(0|0)



263/1g

$\mathbb{D} = \mathbb{R}^+$; keine einfache Symmetrie; Nullstelle: $x_1 = 1$

betragsfrei schreiben: $h(x) = \begin{cases} +\ln x & \text{für } x \geq 1 \\ -\ln x & \text{für } x < 1 \end{cases}$

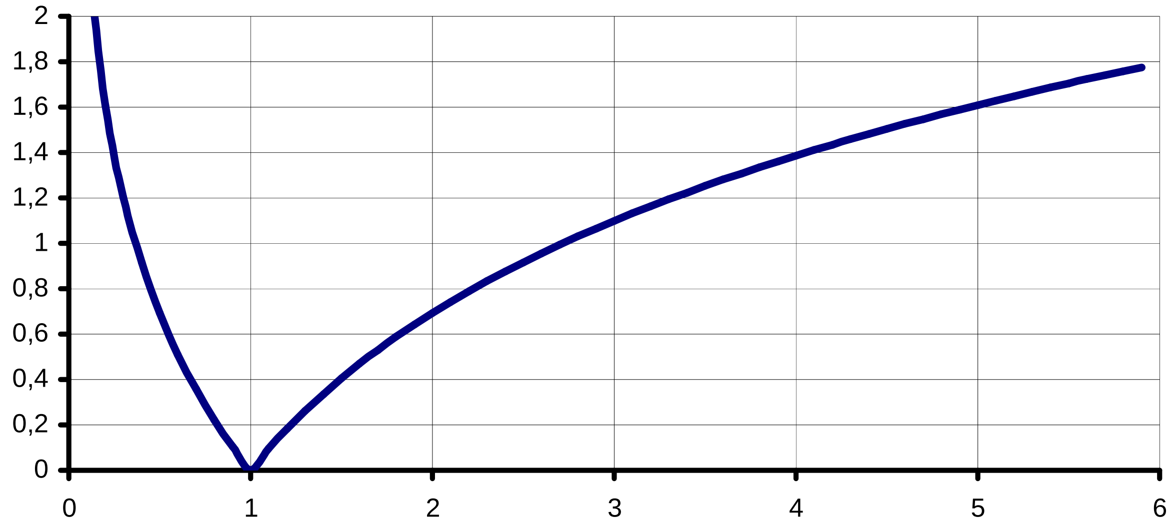
$h(x) \to \infty$ für $x \to 0$ und für $x \to \infty$ ➔ senkrechte Asymptote: y-Achse

$h'(x) = \begin{cases} +\frac{1}{x} & \text{für } x > 1 \\ -\frac{1}{x} & \text{für } x < 1 \end{cases}$; $h'(x) > 0$ (str. m. st.) für $x > 1$, $h'(x) < 0$ (str. m. f.) für $x < 1$ ➔ $T(1|0)$

(es gibt keine Stelle, bei der $h'(x) = 0$ wäre; bei $x = 1$ ist die Funktion h nicht differenzierbar!)

$h''(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x^2} & \text{für } x > 1 \\ +\frac{1}{x^2} & \text{für } x < 1 \end{cases}$; $h''(x) > 0$ (L) für $x < 1$, $h''(x) < 0$ (R) für $x > 1$ ➔ $W(1|0)$

(es gibt keine Stelle, bei der $h''(x) = 0$ wäre, vgl. oben!)



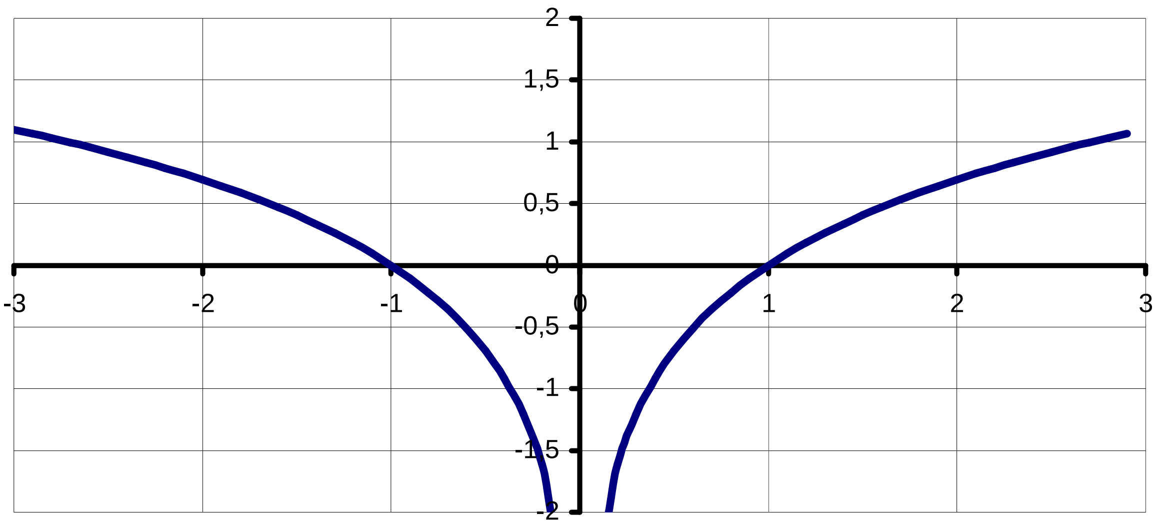
263/1h

$\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$; symmetrisch zur y-Achse, da f(–x) = f(x); Nullstellen: $x_{1,2} = \pm 1$

$f(x) \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow \infty$; $f(x) \rightarrow -\infty$ für $x \rightarrow 0$ ➔ senkrechte Asymptote: y-Achse

$f'(x) = \frac{1}{x}$; f'(x) > 0 (str. m. st.) für x > 0, f '(x) < 0 (str. m. f.) für x < 0; keine Hoch-/Tiefpunkte

$f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ (R) in ganz $\mathbb{D}$ ➔ keine Wendepunkte



263/1i

$\mathbb{D} = \mathbb{R}^+\backslash\{1\}$; keine einfache Symmetrie; keine Nullstellen

$h(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow 0$; $h(x) \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow \infty$ (L'Hopital)

$h(x) \rightarrow -\infty$ für $x \rightarrow 1$, x < 1; $h(x) \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow 1$, x > 1 ➔ Polstelle mit VZW, s. A. x = 1

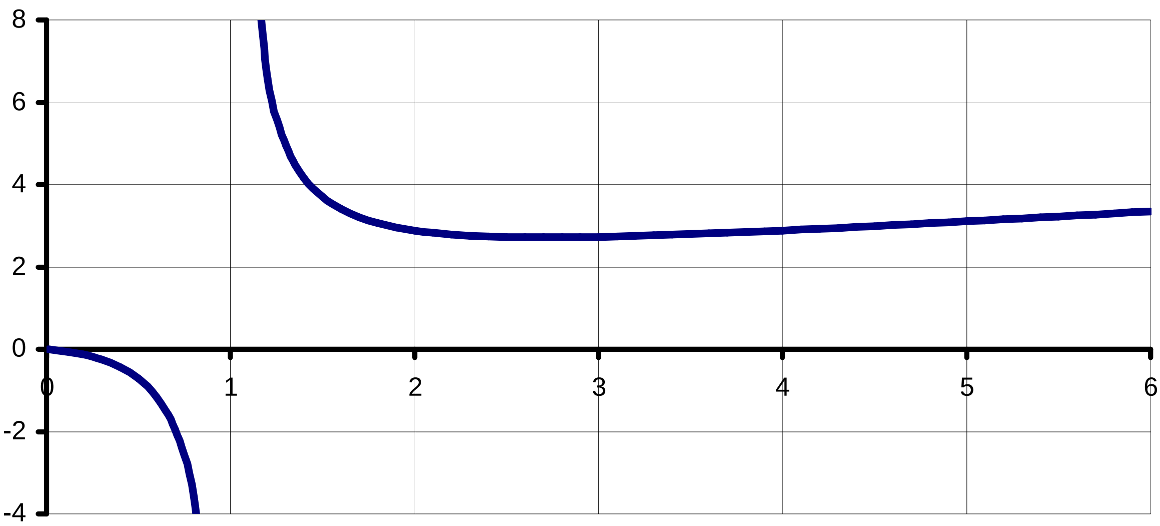
$h'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$; h'(x) = 0 für $x_2 = e$; h'(x) > 0 (str. m. st.) für x > e, h'(x) < 0 (str. m. f.) für x < e

(Nenner ist in $\mathbb{D}$ > 0, Zähler wechselt bei e sein Vorzeichen von – nach +) ➔ T(e|e)

$h''(x) = \frac{2 - \ln(x)}{x\,(\ln x)^3}$; h''(x) = 0 für $x_3 = e^2$; h''(x) > 0 (L) für $1 < x < e^2$,

h''(x) < 0 (R) für $x > e^2$ und für 0 < x < 1 ➔ $W(e^2|e^2/2)$

(Nenner wechselt bei 1 sein Vorzeichen von – nach +, Zähler wechselt bei e von + nach –)



263/1k

$\mathbb{D} =]0{,}5;\infty[$; keine einfache Symmetrie; Nullstelle: $x_1 = 1$

f(x) → 0 für x → ∞ (L'Hopital); f(x) → $-\infty$ für x → 0,5 ➔ w.A.: x-Achse, s. A.: x = 0,5

f(x) → $-\infty$ für x → 1, x < 1; h(x) → ∞ für x → 1, x > 1 ➔ Polstelle mit VZW, s. A. x = 1

$f'(x) = 20 \cdot \frac{1-\ln(2x-1)}{(2x-1)^2}$; f '(x) = 0 für $x_2 = (e+1)/2$

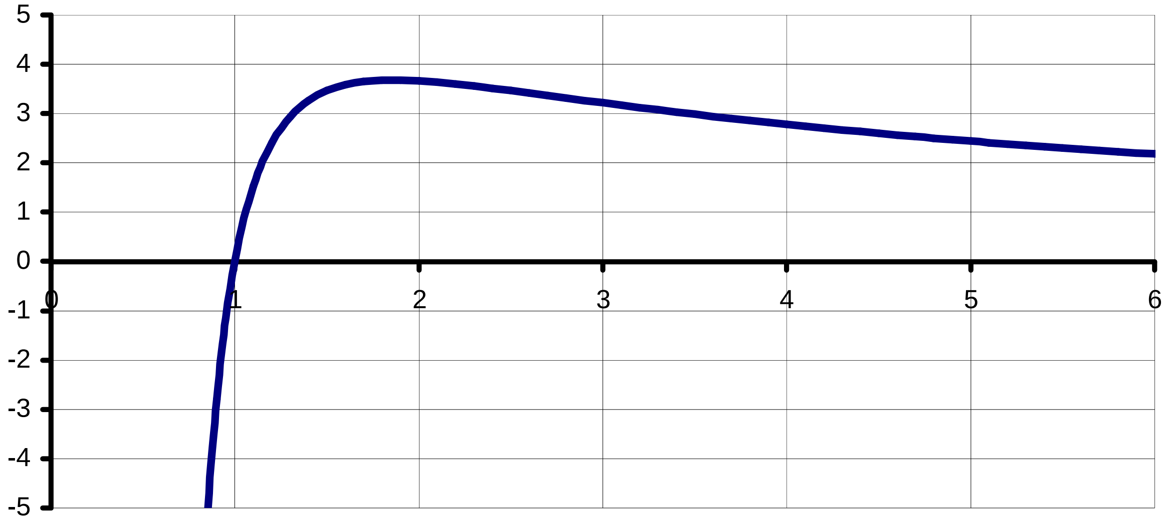
f '(x) > 0 (str. m. st.) für x < (e+1)/2, f'(x) < 0 (str. m. f.) für x > (e+1)/2

(Nenner ist immer > 0, Zähler wechselt bei (e+1)/2 sein Vorzeichen von + nach –) ➔ H((e+1)/2|10/e)

$f''(x) = 40 \cdot \frac{2\ln(2x-1)-3}{(2x-1)^3}$; f ''(x) = 0 für $x_3 = (e^{1,5}+1)/2$

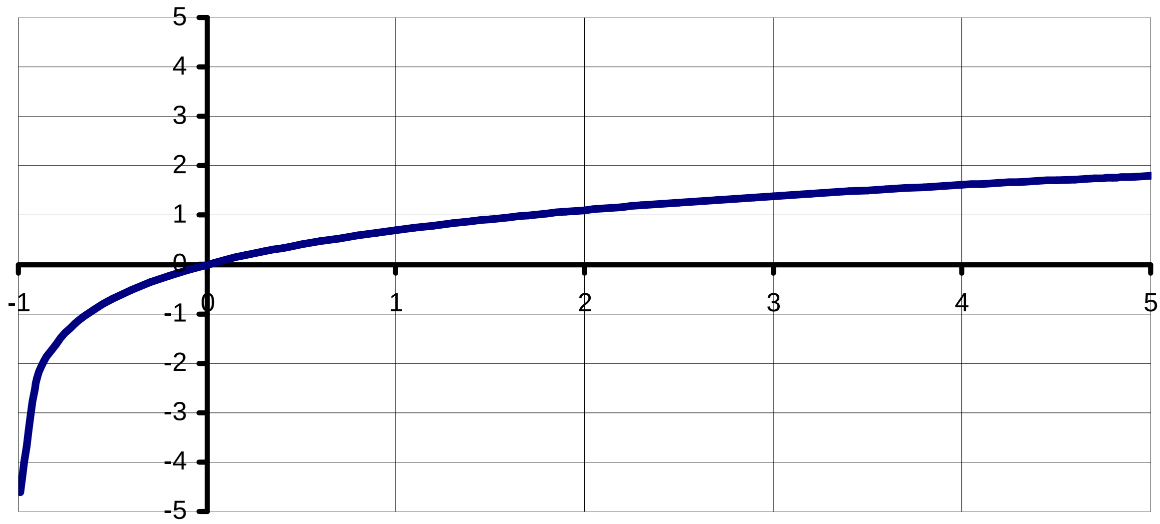
f''(x) > 0 (L) für x > $(e^{1,5}+1)/2$; f''(x) < 0 (R) für x < $(e^{1,5}+1)/2$ ➔ W($(e^{1,5}+1)/2|15/e^{1,5}$)

(Nenner ist in $\mathbb{D}$ > 0 , Zähler wechselt bei $(e^{1,5}+1)/2$ sein Vorzeichen von – nach +)



263/2

a) x + 1 > 0 ➔ x > -1 ➔ $\mathbb{D}$ =]-1;∞[
b) g(x) → $-\infty$ für x → -1 ➔ senkrechte Asymptote: x = 1
c) x + 1 = 1 ➔ $x_1 = 0$
d)



e) noch zu besprechen!

264/3

a) $\frac{x}{2x-1} > 0$ ➔ x < 0 oder x > 0,5 (z. B. mit Vorzeichentabelle) ➔ $\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash[0;0{,}5]$

b) $\frac{x}{2x-1} \rightarrow 0{,}5$ für $x \rightarrow \pm\infty$ ➔ $f(x) \rightarrow \ln 0{,}5$ für $x \rightarrow \pm\infty$ ➔ waagrechte Asymptote: y = ln 0,5

$\frac{x}{2x-1} \rightarrow$ für $x \rightarrow 0$ ➔ $f(x) \rightarrow -\infty$ für $x \rightarrow 0$ ➔ senkrechte Asymptote: y-Achse

$\frac{x}{2x-1} \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow 0{,}5$ ➔ $f(x) \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow \infty$ ➔ senkrechte Asymptote: x = 0,5

c) $\frac{x}{2x-1} = 1$ ➔ $x_1 = 1$

d) f(x) = ln x – ln(2x – 1) ➔ $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x-1} \cdot 2 = \ldots = \frac{-1}{x(2x-1)}$

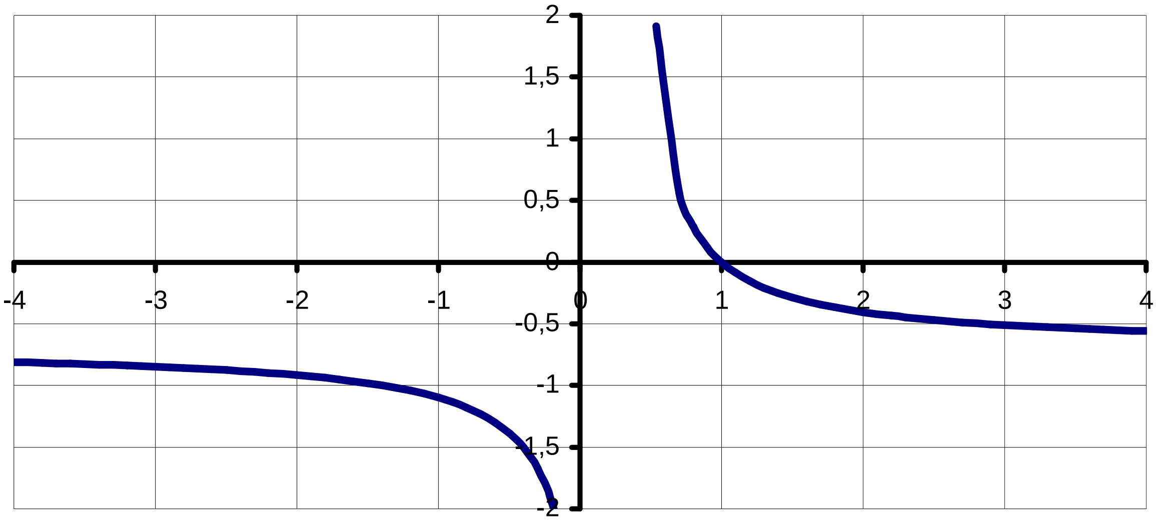
Zähler ist < 0; Nenner ist in $\mathbb{D}$ überall > 0 ➔ f ’ < 0 in ganz $\mathbb{D}$ ➔ G ist str. mon. Fallend in $\mathbb{D}$

e) $f''(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{4}{(2x-1)^2} = \frac{4x-1}{x^2(2x-1)^2}$; f ’’(x) = 0 ➔ $x_2 = 0{,}25$

Nenner ist überall > 0; Zähler ist < 0 für x < 0,25 und > 0 für x > 0,25 ➔ G ist rechtsgekrümmt für x < 0, linksgekrümmt für x > 0,5; kein Wendepunkt ($x_2 = 0{,}25$ gehört nicht zu $\mathbb{D}$!)

f)

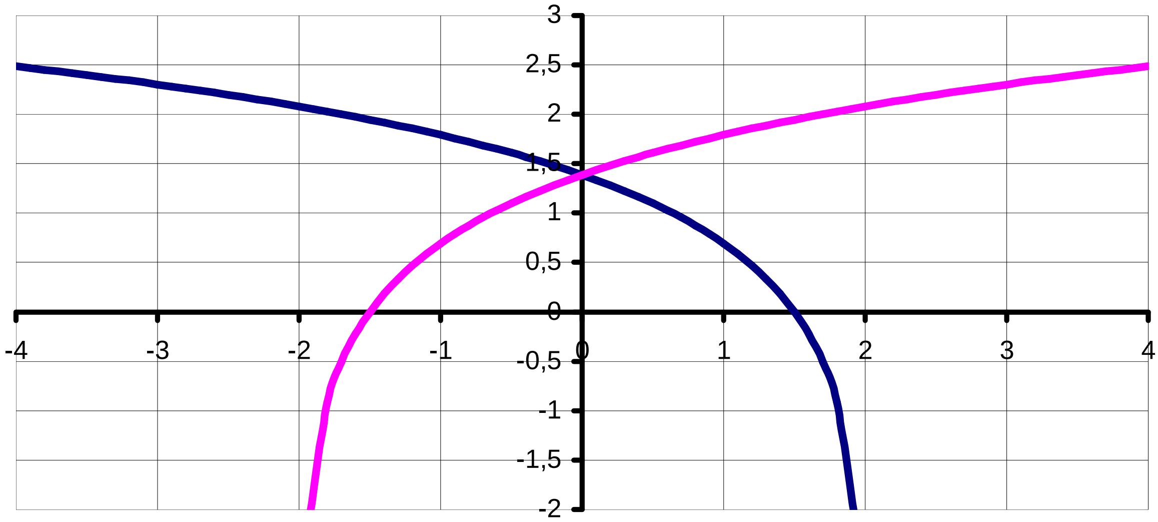
g)



h) und i) noch zu besprechen!

265/5 (a = 4)

a) $2x + 4 > 0$ ➔ $x > -2$ ➔ $\mathbb{D}_f =]-2;\infty[$; $\quad$ $4 - 2x > 0$ ➔ $x < 2$ ➔ $\mathbb{D}_g =]-\infty;2[$
b) $2x + 4 = 4 - 2x$ ➔ $x = 0$; $f(0) = g(0) = \ln 4$ ➔ $S(0|\ln 4)$
c) – (a = 4!)
d) $2x + 4 = 1$ ➔ $x_1 = -1{,}5$; $\quad$ $4 - 2x = 1$ ➔ $x_2 = 1{,}5$
e) $2x + 4 \to 0$ für $x \to -2$ ➔ $f(x) \to -\infty$ für $x \to -2$ ➔ senkrechte Asymptote $y = -2$ für f
senkrechte Asymptote für g: $y = 2$
f)



g) $F'(x) = 1 \cdot (\ln(2x + 4) - 1) + (x + 2) \cdot \dfrac{1}{2x+4} \cdot 2 = \ln(2x + 4) - 1 + 1 = \ln(2x + 4) = f(x)$

h) $A = \int\limits_{-1,5}^{0} f(x)dx = [F(x)]_{-1,5}^{0} = [(x+2)(\ln(2x+4)-1)]_{-1,5}^{0} = 2 \cdot (\ln 4 - 1) - 0{,}5 \cdot (\ln 1 - 1) = 2 \cdot \ln 4 - 1{,}5$

266/7 (a = 2)

a) $\lim\limits_{x \to 0}\left(2(x-1) - 2\ln x\right) = 2 \cdot (-1) - 2 \cdot (-\infty) = \infty$ ➔ senkrechte Asymptote: y-Achse

b) $f'(x) = 2 - \dfrac{2}{x}$; $f''(x) = \dfrac{2}{x^2}$

c) $f'(x) = 0$ ➔ $x_1 = 1$; $f''(1) = 2 > 0$ ➔ Minimum; $f(1) = 2 \cdot 0 - 2 \ln 1 = 0$ ➔ $T(1|0)$
$f''(x) > 0$ überall ➔ G ist überall linksgekrümmt
d) –
e) $x = 1$ ist Nullstelle, da $f(1) = 0$; da f für $x < 1$ streng monoton fällt und für $x > 1$ streng monoton steigt, ist dies auch die einzige Nullstelle
f)

266/8 (a = 1)

a) $(\ln(x))^2 \to \infty$ für $x \to 0$ und für $x \to \infty$ ➔ $f(x) \to -\infty$ für $x \to 0$ und für $x \to \infty$

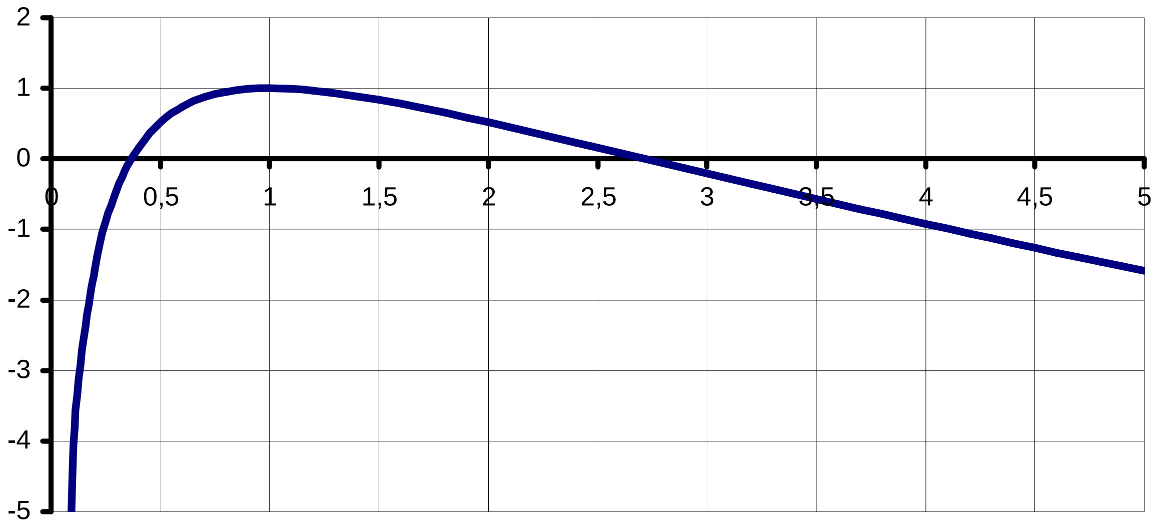
b) $f'(x) = -2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x} = -2 \cdot \frac{\ln x}{x}$; $f''(x) = -2 \cdot \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = 2 \cdot \frac{\ln x - 1}{x^2}$

c) $f'(x) = 0$ ➔ $x_1 = 1$; $f''(1) = -2 < 0$ ➔ Maximum; $f(1) = 1$ ➔ H(1|1)

d) $f''(x) = 0$ ➔ $x_2 = e$; $f''(x) < 0$ für $x < e$; $f''(x) > 0$ für $x > 0$ (Nenner > 0 in ganz $\mathbb{D}$, Zähler wechselt bei e sein Vorzeichen von – nach +) ➔ G ist rechtsgekr. für $x < e$, linksgekr. für $x > e$

e) $1 = (\ln x)^2$ ➔ $\ln x = \pm 1$ ➔ $x_3 = e$; $x_4 = \frac{1}{e}$

f)



g) Grundseite g = u; Höhe h = f(u) ➔ $A(u) = 0{,}5 \cdot u \cdot f(u) = 0{,}5 \cdot u \cdot (1 - (\ln u)^2)$
$A'(u) = \ldots = 0{,}5 - 0{,}5\,(\ln u)^2 - \ln u$; $A'(u) = 0$, Substitution ➔ $0{,}5 - 0{,}5\,z^2 - z = 0$ (*)

$z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$; Resubstitution ➔ $u_1 = \exp\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$; u_2 liegt nicht in $\mathbb{D}_A$

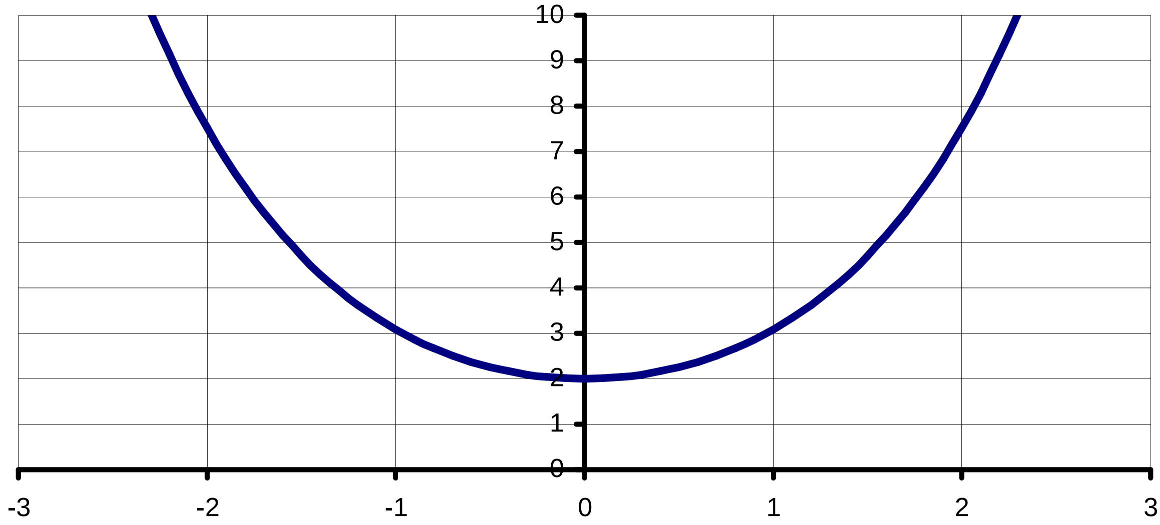
(*) beschreibt eine nach unten geöffnete Parabel ➔ VZW von + nach – bei z_1 ➔ Maximum

$$A(u_1) = \frac{1}{2} \cdot \exp\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \left(1 - \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2\right) = \ldots = \frac{1}{2} \cdot \exp\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0{,}573$$

$A(u) \to 0$ für $u \to e$ und für $u \to \frac{1}{e}$ ➔ absolutes Maximum bei u_1

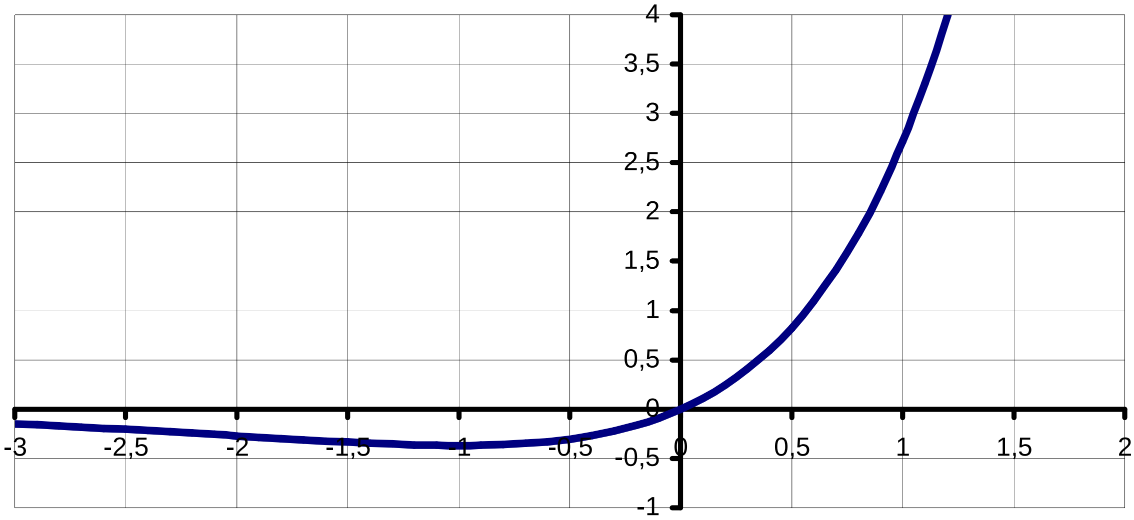
285/1a

$\mathbb{D} = \mathbb{R}$; keine Nullstellen; $f(-x) = e^{x} + e^{-x} = f(x)$ ➔ symmetrisch zur y-Achse
$f(x) \to \infty$ für $x \to \pm\infty$ (keine Asympoten)
$f'(x) = -e^{-x} + e^{x}$; $f'(x) = 0$ für $x_1 = 0$; $f'(x) > 0$ (str. m. st.) für $x > 0$, $f'(x) < 0$ (str. m. f.) für $x < 0$
(folgt z. B. aus $e^{2x} > 1$ für $x > 0$, $e^{2x} < 1$ für $x < 0$) ➔ T(0|2)
$f''(x) = f(x) > 0$ (L) in ganz $\mathbb{D}$ ➔ kein Wendepunkt



285/1b

$\mathbb{D} = \mathbb{R}$; keine einfache Symmetrie; Nullstelle: $x_1 = 0$
$h(x) \to \infty$ für $x \to \infty$; $h(x) \to 0$ für $x \to -\infty$ (L'Hopital) ➔ waagrechte Asymptote: x-Achse
$h'(x) = (1+x)\, e^{x}$; $h'(x) = 0$ für $x_2 = -1$; $h'(x) > 0$ (str. m. st.) für $x > -1$, $h'(x) < 0$ (str. m. f.) für $x < -1$
➔ T(–1|–1/e)
$h''(x) = (2+x)\, e^{x}$; $h''(x) = 0$ für $x_3 = -2$; $h''(x) > 0$ (L) für $x > -2$; $h''(x) < 0$ (R) für $x > -2$
➔ W(–2|–2/e^2)

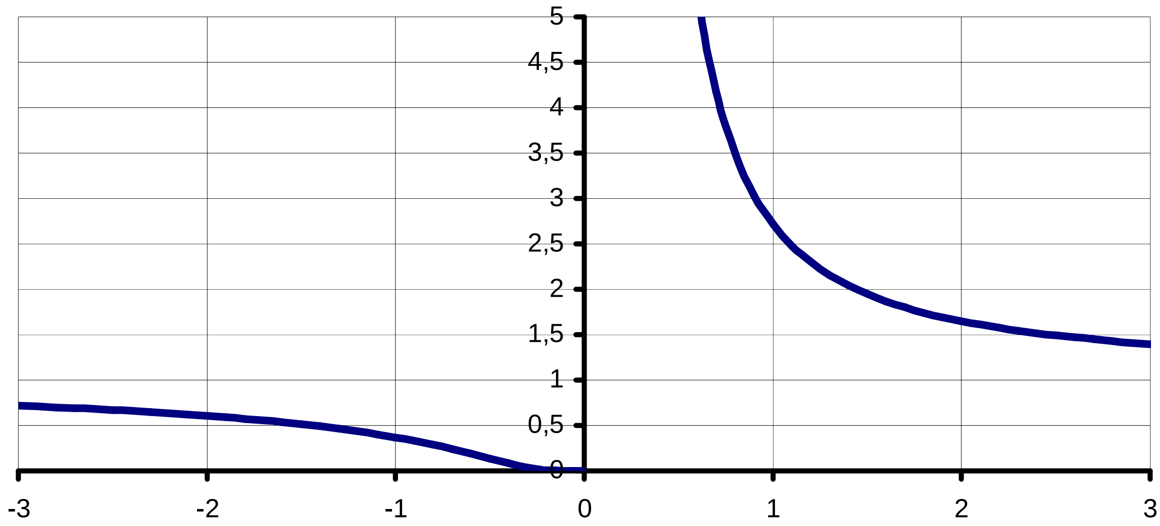


285/1c

$\mathbb{D} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$; keine einfache Symmetrie; keine Nullstellen
$g(x) \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow 0, x > 0$; $g(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow 0, x < 0$ ➔ senkrechte Asymptote: y-Achse
$g(x) \rightarrow 1$ für $x \rightarrow \pm\infty$ ➔ waagrechte Asymptote: $y = 1$

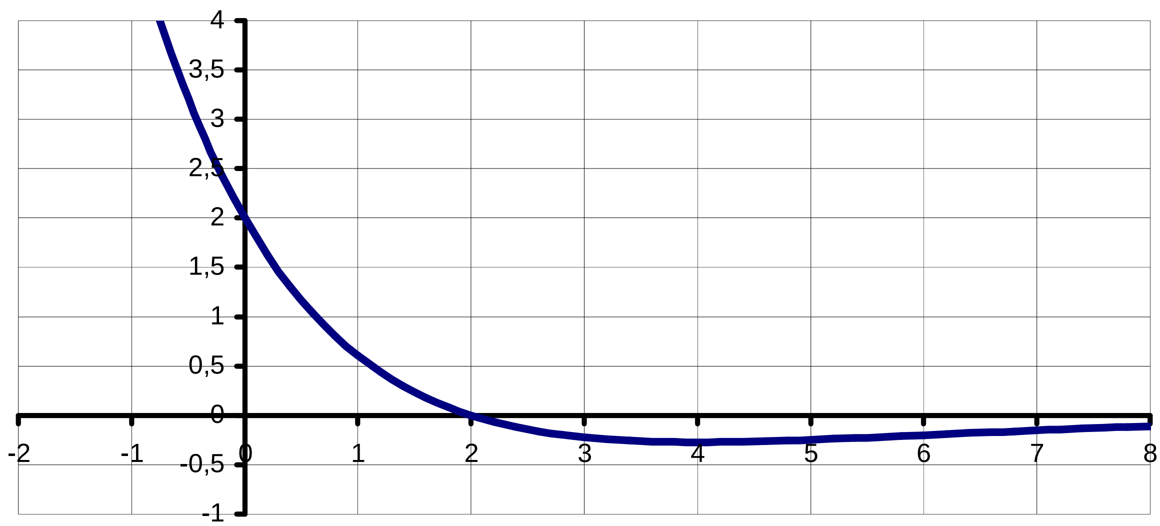
$g'(x) = -\,e^{1/x} \cdot \frac{1}{x^2}$; $g'(x) < 0$ (str. m. f.) in ganz $\mathbb{D}$ ➔ keine Hoch-/Tiefpunkte

$g''(x) = e^{1/x} \cdot \frac{1+2x}{x^4}$; $g''(x) = 0$ für $x_1 = -0{,}5$; $g''(x) > 0$ (L) für $x > -0{,}5$; $g''(x) < 0$ (R) für $x < -0{,}5$
(Nenner ist immer > 0, Zähler wechselt sein Vorzeichen bei –0,5 von – nach +) ➔ $W(-0{,}5|e^{-2})$



285/1d

$\mathbb{D} = \mathbb{R}$; keine einfache Symmetrie; Nullstelle: $x_1 = 2$
$f(x) \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow -\infty$; $f(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \infty$ ➔ waagrechte Asymptote: x-Achse
$f'(x) = (0{,}5\,x - 2)\,e^{-0{,}5\,x}$; $f'(x) = 0$ für $x_2 = 4$; $f'(x) < 0$ (str. m. f.) für $x < 4$; $f'(x) > 0$ für $x > 4$
($e^{-0{,}5\,x}$ ist immer > 0, Faktor in Klammer wechselt bei 4 sein Vorzeichen von – nach +) ➔ $T(4|-2e^{-2})$
$f''(x) = (1{,}5 - 0{,}25\,x)\,e^{-0{,}5\,x}$; $f''(x) = 0$ für $x_3 = 6$; $f''(x) > 0$ (L) für $x < 6$; $f''(x) < 0$ (R) für $x > 6$
($e^{-0{,}5\,x}$ ist immer > 0, Faktor in Klammer wechselt bei 6 sein Vorzeichen von + nach –) ➔ $W(6|-4e^{-3})$



285/1e

$\mathbb{D} = \mathbb{R}$; keine einfache Symmetrie; Nullstelle: $x_1 = 0$

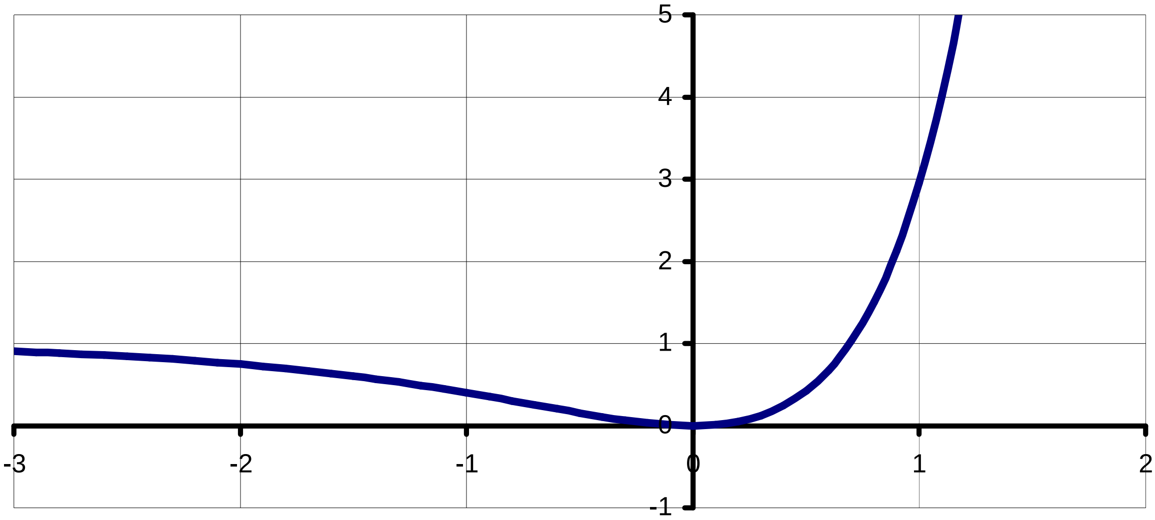
$f(x) \rightarrow 1$ für $x \rightarrow -\infty$; $f(x) \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow \infty$ ➔ waagrechte Asymptote: $y = 1$

$f'(x) = 2e^x(e^x - 1)$; $f'(x) = 0$ für $x_2 = 0$; $f'(x) < 0$ (str. m. f.) für $x < 0$; $f'(x) > 0$ für $x > 0$

(e^x ist immer > 0, Faktor in Klammer wechselt bei 0 sein Vorzeichen von – nach +) ➔ T(0|0)

$f''(x) = 2e^x(2e^x - 1)$; $f''(x) = 0$ für $x_3 = \ln 0{,}5$; $f''(x) > 0$ (L) für $x > \ln 0{,}5$; $f''(x) < 0$ (R) für $x < \ln 0{,}5$

($e^x > 0$; Faktor in Klammer wechselt bei ln 0,5 sein Vorzeichen von – nach +) ➔ W(ln 0,5|0,25)



285/1f

$\mathbb{D} = \mathbb{R}^+_0$; keine einfache Symmetrie; keine Nullstellen

$g(x) \rightarrow 1$ für $x \rightarrow 0$; $g(x) \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow \infty$

$g'(x) = e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $g'(x) > 0$ in ganz $\mathbb{D}$ ➔ keine Hoch-/Tiefpunkte

$g''(x) = e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{4x^{3/2}}$; $g''(x) = 0$ für $x_1 = 1$; $g''(x) > 0$ (L) für $x > 1$; $g''(x) < 0$ (R) für $x < 1$

($e^{\sqrt{x}} > 0$; Nenner > 0 in ganz $\mathbb{D}$; Zähler wechselt bei 1 sein Vorzeichen von – nach +)➔ W(1|e)

285/2

a) Nullstelle $x_1 = 0$ (da $e^{-x^2} \neq 0$ für alle x); symmetrisch zum Ursprung, da f(-x) = -f(x)

b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} 2x e^{-x^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{e^{x^2}} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2}{e^{x^2}\cdot 2x} = 0$ (L'Hopital) ➔ waagrechte Asymptote: x-Achse

c) $f'(x) = 2\cdot e^{-x^2} + 2x\cdot e^{-x^2}\cdot(-2x) = (2-4x^2)\cdot e^{-x^2}$; $f''(x) = \ldots = (8x^3 - 12x)\cdot e^{-x^2}$

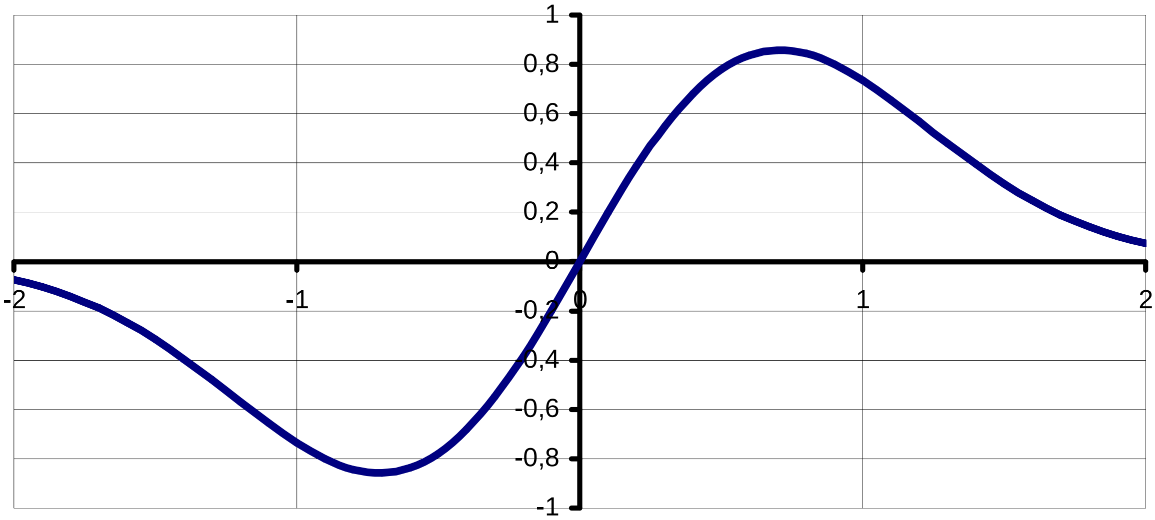
$f'(x) = 0$ ➔ $x_{2,3} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$; $f''\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) < 0$ ➔ Maximum; $f''\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right) > 0$ ➔ Minimum

$f\left(\pm\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \pm\sqrt{2}\cdot e^{-0,5}$ ➔ $T\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\middle|-\sqrt{2}\cdot e^{-0,5}\right)$; $H\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\middle|\sqrt{2}\cdot e^{-0,5}\right)$

$f''(x) = 0$ ➔ $x_4 = 0$; $x_{5,6} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}$; alles einfache Nullstellen ➔ VZW ➔ Wendestellen

$f(0) = 0$; $f\left(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \pm\sqrt{6}\cdot e^{-1,5}$ ➔ $W_1(0|0)$; $W_2\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\middle|-\sqrt{6}\cdot e^{-1,5}\right)$; $W_3\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\middle|-\sqrt{6}\cdot e^{-1,5}\right)$

d)

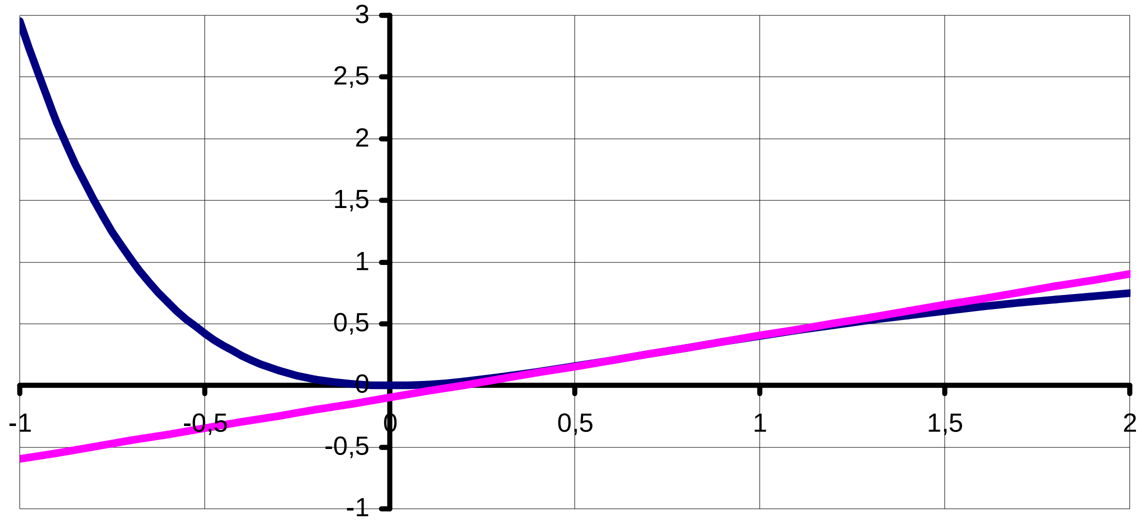


e) $F'(x) = -e^{-x^2}\cdot(-2x) = 2x\, e^{-x^2} = f(x)$ ➔ $A = \int\limits_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{\infty} f(x)dx = 2\cdot\int\limits_{0}^{\infty} f(x)dx$ (Symmetrie)

$= 2\cdot[F(x)]_0^\infty = 2\cdot\left[-e^{-x^2}\right]_0^\infty = 2\cdot\left(-e^{-\infty} - (-e^0)\right) = 2$

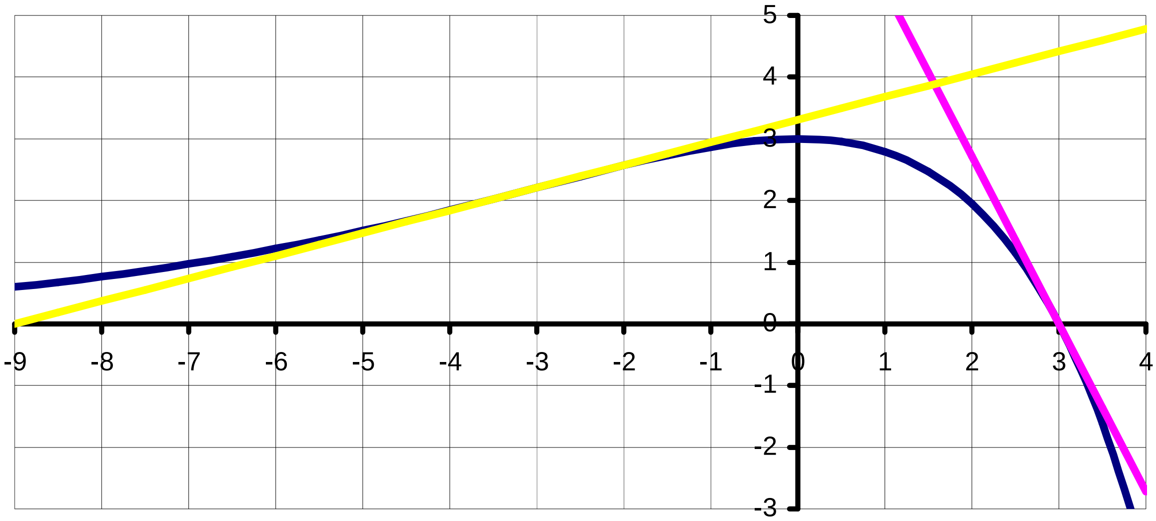
285/3 (vgl. 285/1e!)

a) $x_1 = 0$
b) waagrechte Asymptote $y = 1$
c) $g'(x) = 2\,e^{-x}\,(1 - e^{-x}) = 2\,e^{-x} - 2\,e^{-2x}$; $g''(x) = -2\,e^{-x} + 4\,e^{-2x} = 2\,e^{-x}\,(2\,e^{-x} - 1)$
d) $g'(x) = 0 \Rightarrow x_2 = 0$; $g''(0) = 2 > 0 \Rightarrow$ Minimum; $g(0) = 0 \Rightarrow T(0|0)$
$g''(x) = 0 \Rightarrow x_3 = \ln 2$; g'' wechselt Vorzeichen $\Rightarrow$ Wendestelle; $g(\ln 2) = 0{,}25 \Rightarrow W(\ln 2|0{,}25)$
e) $g'(\ln 2) = 0{,}5 \Rightarrow t\colon y = 0{,}5\,(x - \ln 2) + 0{,}25$
f)



286/6 (k = 3)

a) $S_y(0|3)$; $S_x(3|0)$
b) $g(x) \to 0$ für $x \to \infty$ (L'Hopital) $\Rightarrow$ waagrechte Asymptote: x-Achse
c) $g'(x) = -\frac{1}{3}\,x\,e^{x/3}$; $g''(x) = -\frac{1}{9}(x+3)\,e^{x/3}$
d) $g'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$; $g''(0) = -\frac{1}{3} < 0 \Rightarrow$ Maximum; $H(0|3)$
e) $e^{x/3}$ ist immer > 0; Klammer wechselt Vorzeichen von – nach + bei $x_2 = -3$
$\Rightarrow g''(x) > 0$ (L) für $x < -3$, $g''(x) < 0$ (R) für $x > -3$
f) Wendetangente: $m_{Wt} = g'(-3) = e^{-1}$; Tangente in Nullstelle: $m_T = g'(3) = -e \Rightarrow m_{Wt}\cdot m_T = -1$
g) –
h)



285/4

a) f(x) = $\begin{cases} 4x^2 e^x & \text{für } x < 0 \\ 4x^2 e^{-x} & \text{für } x \ge 0 \end{cases}$

b) f(x) → 0 für x → ± ∞ (mit L'Hopital) ➔ waagrechte Asymptote: x-Achse

c) f(x) → 0 für x → 0, x < 0 und f(x) → 0 für x → 0, x < 0 und f(0) = 0 ➔ f ist stetig bei 0

f '(x) = $\begin{cases} (8x+4x^2)\cdot e^x & \text{für } x < 0 \\ (8x-4x^2)\cdot e^{-x} & \text{für } x > 0 \end{cases}$

f '(x) → 0 für x → 0, x < 0 und f '(x) → 0 für x → 0, x < 0 ➔ f ist differenzierbar bei 0

d) 1. Ableitung: siehe c

f ''(x) = $\begin{cases} (4x^2+16x+8)\cdot e^x & \text{für } x < 0 \\ (4x^2-16x+8)\cdot e^{-x} & \text{für } x > 0 \end{cases}$

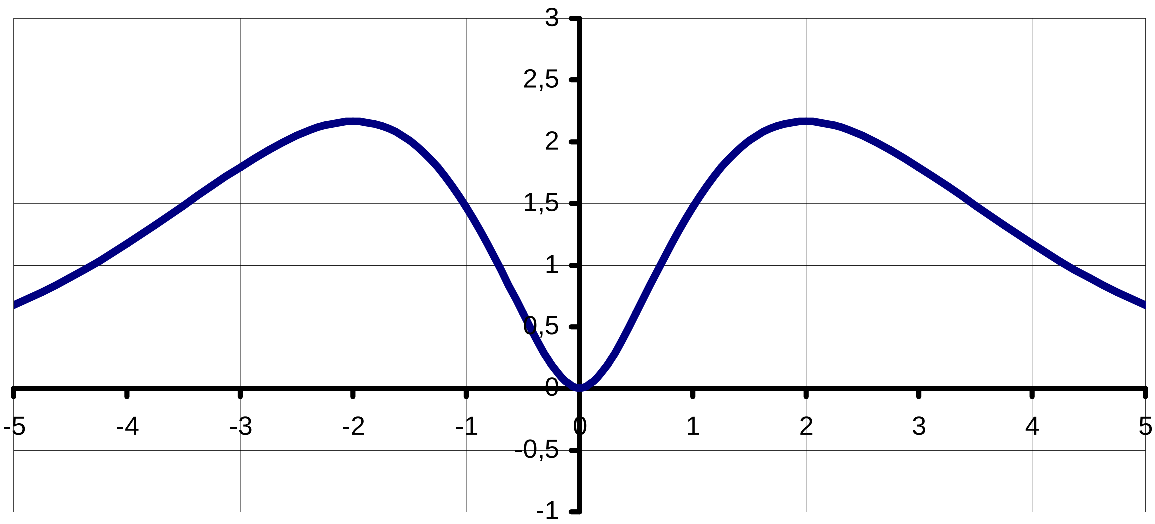
e) f '(x) = 0 ➔ $x_1 = 0$; $x_2 = 2$; $x_3 = -2$; f ''(0) > 0 ➔ Minimum; f(0) = 0 ➔ T(0|0)

f ''(± 2) < 0 ➔ Maximum; f(± 2) = 16·e^{-2} ➔ $H_{1,2}(\pm 2|16\cdot e^{-2})$

f ''(x) = 0 ➔ $x_{4,5} = 2\pm\sqrt{2}$; $x_{6,7} = -2\pm\sqrt{2}$; alles Nullstellen von f ''mit VZW ➔ Wendestellen

..... $W_{1,2}(\pm 3{,}41|1{,}53)$; $W_{3,4}(\pm 0{,}59|0{,}76)$

f)



g) F'(x) = ... = f(x)

h) A = $\int_0^\infty f(x)dx = [F(x)]_0^\infty = [-4\cdot e^{-x}\cdot(x^2+2x+2)]_0^\infty = \ldots = 8$

286/5

a) $f(x) = \begin{cases} e^{x\cdot\ln(-x)} & \text{für } x < 0 \\ e^{x\cdot\ln x} & \text{für } x > 0 \end{cases} = e^{x\cdot\ln|x|}$

b) f(x) → ∞ für x → ∞; f(x) → 0 für x → −∞
f(x) → 1 für x → 0, x > 0; f(x) → 1 für x → 0, x < 0 ➔ Definitionslücke ist stetig behebbar

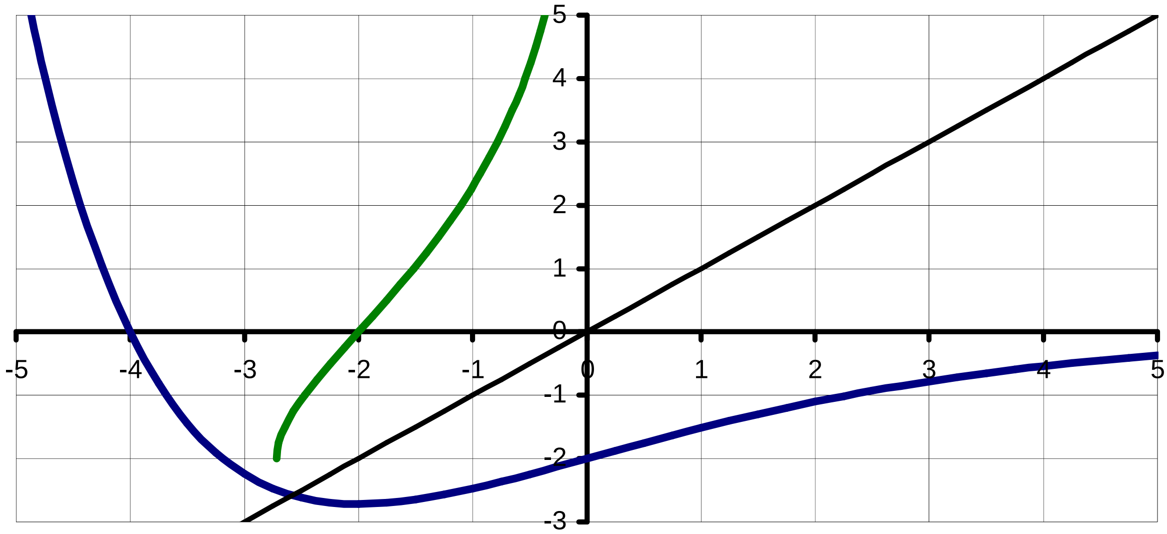
c) $f'(x) = e^{x\cdot\ln|x|} \cdot (x\cdot\ln|x|)' = e^{x\cdot\ln|x|} \cdot (\ln|x| + 1)$
$f''(x) = (e^{x\cdot\ln|x|})' \cdot (\ln|x| + 1) + e^{x\cdot\ln|x|} \cdot (\ln|x| + 1)' = e^{x\cdot\ln|x|} \cdot (\ln|x| + 1)^2 + e^{x\cdot\ln|x|} \cdot 1/x$

d) $f'(x) = 0$ ➔ $\ln|x| + 1 = 0$ ➔ $x_{1,2} = \pm\frac{1}{e}$
$f''(1/e) = e^{-1/e} \cdot 0 + e^{-1/e} \cdot e > 0$ ➔ Minimum; $T(1/e|e^{-1/e})$
$f''(-1/e) = e^{1/e} \cdot 0 + e^{1/e} \cdot (-1/e) < 0$ ➔ Maximum; $H(-1/e|e^{1/e})$
$f''(x) = 0$ ➔ $(\ln|x| + 1)^2 + 1/x = 0$; Lösen dieser Gleichung: ???
durch probieren: f '' wechselt das Vorzeichen bei –1 und bei 0 (von + nach – bzw. von – nach +)
➔ W(-1|1); einziger Wendepunkt, da $0 \notin \mathbb{D}$!

e)

286/7 (a = -2)

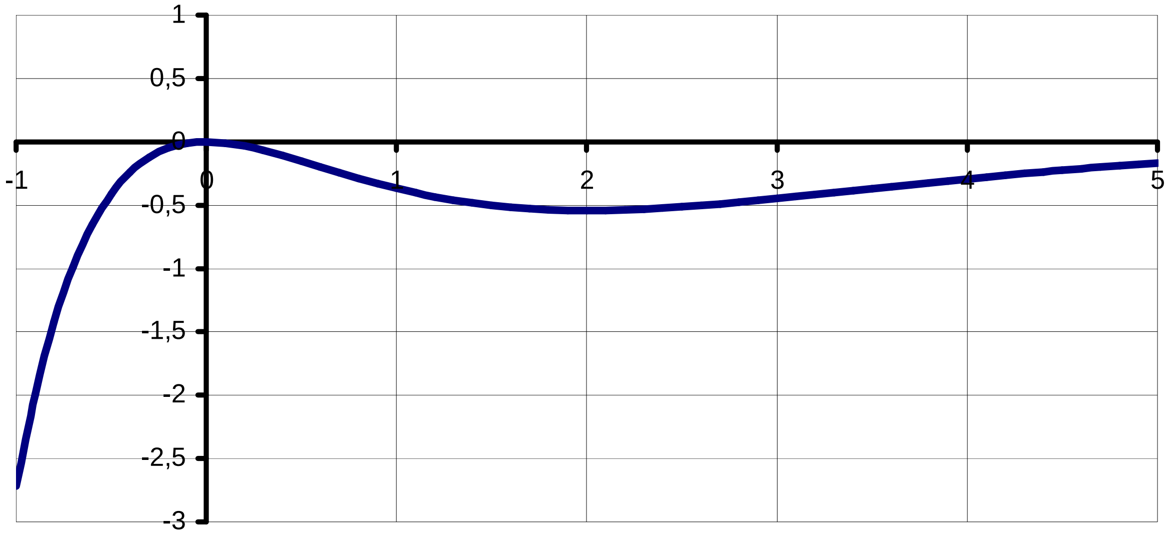
a) $S_x(-4|0)$; $S_y(0|-2)$
b) $f'(x) = (0{,}25\,x + 0{,}5)\,e^{-x/2}$; $f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = -2$
   $f'(x)$ wechselt bei –2 das Vorzeichen von – nach +; $f(-2) = -e \Rightarrow T(-2|-e)$
c) –
d) $f''(x) = -0{,}125 \cdot x \cdot e^{-x/2} \Rightarrow f''(x) > 0$ (L) für $x < 0$, $f''(x) < 0$ (R) für $x > 0 \Rightarrow W(0|-2)$
e) $f(x) \to 0$ für $x \to \infty$; $f(x) \to \infty$ für $x \to -\infty \Rightarrow$ waagrechte Asymptote: x-Achse
f) i)



g) (f ist streng monoton steigen in $[-2; \infty[$ $\Rightarrow$) zu jedem y-Wert gibt es genau einen x-Wert $\Rightarrow$ f ist umkehrbar
h) $\mathbb{D}_{f^*} = \mathbb{W}_f = [-e; 0[$; $\mathbb{W}_{f^*} = \mathbb{D}_f = [-2; \infty[$
i) siehe oben
k) $F' = f^* \Rightarrow$ F ist streng monoton fallend in $]-e;-2[$ (weil dort $f^* < 0$), streng monoton steigend in $]-2;0[$ (weil dort $f^* > 0$) $\Rightarrow$ absolut kleinster Wert wird bei –2 angenommen; $F(-2) = 0$

287/8 (a = -1)

a) f(x) → 0 für x → ∞ (L'Hopital); f(x) → – ∞ für x → – ∞ ➔ waagrechte Asymptote: x-Achse
b) f '(x) = $(x^2 - 2x)\, e^{-x}$; f ''(x) = $(-x^2 + 4x - 2)\, e^{-x}$
c) f '(x) = 0 ➔ $x_1 = 0$; $x_2 = 2$
   f ''(0) = -2 < 0 ➔ Maximum ➔ H(0|0); f ''(2) = 2 e^{-2} > 0 ➔ Minimum ➔ T(-2|–4/e^2)
d) –
e) f ''(x) = 0 ➔ $x_{3,4} = 2 \pm \sqrt{2}$; beides einfache Nullstellen ➔ Vorzeichenwechsel ➔ Wendestellen
   ➔ W_1(3,41|-0,38); W_2(0,59|-0,19)
f)



287/9 (a = 0,5)

a) f(x) → ∞ für x → 1, x > 1; f(x) → – ∞ für x → 1, x < 1 ➔ Polstelle mit VZW; s. A.: x = 1
b) f(x) → ∞ für x → ∞ (L'Hopital); f(x) → 0 für x → – ∞ ➔ waagrechte Asymptote: x-Achse
c) f '(x) = $\dfrac{(0,5x - 1,5)e^{0,5x}}{(x-1)^2}$

Nenner ist in $\mathbb{D}$ immer > 0; $e^{0,5x}$ ist immer > 0; Term in Klammer wechselt bei x = 3 sein Vorzeichen von – nach + ➔ f ist streng monoton fallend für x < 1 und 1 < x < 3, streng monoton steigend für x > 3
d) –
e)