46/1

Gesucht ist der Flächeninhalt eines Rechtecks: A = $\ell \cdot b$

Nebenbedingung: Gesamtlänge des Maschendrahts ist 4,80 m, also $\ell + b = 4{,}8$

➔ … $A(b) = -b^2 + 4{,}8b$ mit $D_A =]0; 4{,}8[$

➔ … $A_{max} = 5{,}76$ m² für $b_{max} = 2{,}4$ m und $\ell_{max} = 2{,}4$ m (d. h. das Rechteck ist ein Quadrat)

46/2

Gesucht ist das Volumen eines Quaders mit quadratischer Grundfläche: $V = G \cdot h = a^2 \cdot h$

Nebenbedingung: Gesamtlänge der Kanten ist 2,40 m, also $8a + 4h = 2{,}4$

➔ … $V(a) = -2a^3 + 0{,}6a^2$ mit $D_V =]0; 0{,}3[$

➔ … $V_{max} = 0{,}008$ m³ für $a_{max} = 0{,}2$ m und $h_{max} = 0{,}2$ m (Es handelt sich also um einen Würfel.)

46/3 vgl. 49/17 und 49/21!

Gesucht ist das Volumen eines Kegels: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

Nebenbedingung: Hypotenuse des Dreiecks (also Seitenlinie des Kegels), ist 12 cm lang ➔ Satz von Pythagoras verwenden!

➔ … $V(h) = \frac{1}{3}\pi \cdot (-h^3 + 144h)$ mit $D_V =]0; 12[$

➔ … $V_{max} = 128\sqrt{3}\pi \approx 696$ cm³ für $r_{max} = 4\sqrt{6} \approx 9{,}80$ cm und $h_{max} = 4\sqrt{3} \approx 6{,}93$ cm

46/4

Gesucht ist das Volumen einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche: $V = \frac{1}{3}a^2 h$

Nebenbedingung: Zeltstangen, also Seitenkanten der Pyramide, sind 3 m lang ➔ Satz des Pythagoras verwenden! (zweimal: einmal im roten, einmal im grünen Dreieck, ineinander einsetzen)

➔ … $V(h) = \frac{2}{3} \cdot (-h^3 + 9h)$ mit $D_V =]0; 3[$

➔ … $V_{max} = 4\sqrt{3} \approx 6{,}93$ m³ für $h_{max} = \sqrt{3} \approx 1{,}73$ m und $a_{max} = 2\sqrt{3} \approx 3{,}46$ m; $G_{max} = 12$ m²

46/5

Gesucht ist jeweils das Volumen eines Zylinders: $V = \pi r^2 h$

Nebenbedingung: Summe aus Länge der Rolle und vierfachem Radius r ist 108 cm bzw. Summe aus Länge der Rolle (h) und Durchmesser (also doppeltem Radius r) ist 68 cm

➔ … $V(r) = 4\pi(-r^3 + 27r^2)$ mit $D_V =]0; 27[$ bzw. $V(r) = 2\pi(-r^3 + 34r^2)$ mit $D_V =]0; 34[$

➔ … $V_{max} = 11664\pi \approx 36644$ cm³ für $h_{max} = 36$ cm und $d_{max} = 36$ cm

bzw. $V_{max} = \frac{314\,432}{27}\pi \approx 36586$ cm³ für $h_{max} = \frac{68}{3}$ cm und $d_{max} = \frac{136}{3}$ cm

47/6

Gesucht ist das Volumen eines Zylinders: $V = \pi r^2 h$

Nebenbedingung: Käse passt unter die Halbkugel, d. h. Länge der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, bei dem die eine Kathete r und die andere h ist, ist 10 cm ➔ Satz des Pythagoras verwenden! ➔ … $V(h) = \pi(-h^3 + 100h)$ mit $D_V =]0; 10[$

➔ … $V_{max} = \frac{2000}{9}\sqrt{3}\,\pi \approx 1209$ cm³ für $h_{max} = \frac{10}{3}\sqrt{3}$ cm und $r_{max} = \frac{10}{3}\sqrt{6}$ cm

47/7

Gesucht ist der Flächeninhalt eines Rechtecks: $A = a \cdot b$

Nebenbedingung: Der obere rechte Punkt P(a|b) liegt auf dem Graph der Funktion f, d. h. b = f(a);
a muss dabei so gewählt werden, dass P auf der Platte liegt ➔ … $90 \leq a \leq 120$

➔ … $A(a) = -\frac{2}{3}a^2 + 240a$ mit $D_A = [90; 120]$

➔ … $A_{max} = 19200$ cm² für $a_{max} = 120$ cm, $b_{max} = 160$ cm

47/8

Gesucht ist das Volumen eines Kegels: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

Nebenbedingung: Der Kegel soll aus der Kugel gefertigt werden, siehe Skizze ➔ Satz von Pythagoras verwenden! (Die eine Kathete hat offensichtlich die Länge r; bei der anderen muss man beachten, dass man die Länge der Strecke oberhalb des Mittelpunkts ja auch kennt.)

➔ … $V(h) = \frac{1}{3}\pi \cdot (-h^3 + 18h^2)$ mit $D_V =]0; 18[$

➔ … $V_{max} = 288\pi \approx 905$ cm³ für $r_{max} = 6\sqrt{2} \approx 8{,}49$ cm und $h_{max} = 12$ cm

47/9

Gesucht ist der Flächeninhalt eines Rechtecks: A = $a \cdot b = 2x \cdot b$

Nebenbedingung: Der obere rechte Punkt P(x|y=b) liegt auf dem Graph von f, d. h. b = f(x); x muss dabei zwischen 0 und der ersten positiven Nullstelle von f liegen

➔ … A(x) = $\frac{2}{25}x^5 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{18}{5}x$ mit $D_A =]0; \approx 1{,}84[$

➔ … $A_{max} = \frac{176}{75}$ für $a_{max} = 2$ und $b_{max} = \frac{88}{75}$

47/10

a) Gesucht ist der Flächeninhalt eines Dreiecks: A = $\frac{1}{2}gh$

Nebenbedingung: Der obere rechte Punkt P(x=g/2|y=h) liegt auf dem Graph von f, d. h. h = f(g/2); x muss dabei zwischen 0 und der ersten positiven Nullstelle von f liegen

➔ … A(g) = $-\frac{1}{32}g^3 + 2g$ mit $D_A =]0; 8[$

➔ … $A_{max} = \frac{32}{9}\sqrt{3} \approx 6{,}16$ für $g_{max} = \frac{8}{3}\sqrt{3} \approx 4{,}62$ und $h_{max} = \frac{8}{3}$;

b) Gesucht ist der Flächeninhalt eines Trapezes: A = $\frac{a+c}{2}h$ mit a = 8

Nebenbedingung: Der obere rechte Punkt P(x=c/2|y=h) liegt auf dem Graph von f, d. h. h = f(c/2); x muss dabei zwischen 0 und der ersten positiven Nullstelle von f liegen

➔ … A(c) = $-\frac{1}{32}c^3 - \frac{1}{4}c^2 + 2c + 16$ mit $D_A =]0; 8[$

➔ … $A_{max} = \frac{512}{27} \approx 19{,}0$ für $h_{max} = \frac{32}{9}$, $c_{max} = \frac{8}{3}$ (Seitenkanten: $\frac{40}{9}$)

47/11

Gesucht ist das Volumen eines Prismas: V = $G\ h$ mit G = $6 \cdot 0{,}25a^2 \cdot \sqrt{3}$

Nebenbedingung: Der Materialverbrauch, also die Oberfläche, soll gleich $144\sqrt{3}$ cm² sein, d. h. zweimal die Grundfläche plus die sechs Seitenflächen soll gleich $144\sqrt{3}$ sein.

➔ …V(a) = $-\frac{9}{4}a^3 + 108a$ mit $D_V =]0; 4\sqrt{3}[$

➔ … V_{max} = 288 cm³ für a_{max} = 4 cm und $h_{max} = 4\sqrt{3} \approx 6{,}93$ cm

48/12

d) Gesucht ist das Volumen eines Quaders mit quadratischer Grundfläche: V = t·h·b = t·h·15

Nebenbedingung: Der Container passt unter dem Bogen durch, d. h. der obere rechte Punkt P(x=t/2|y=h+1) liegt auf dem Graph von f, d. h. h = f(t/2) – 1

➔ … V(t) = –t³ + 300t mit $D_V =]0; 1{,}5\sqrt{35}[$

➔ … V_{max} = 2000 ℓ für t_{max} = 10 dm und $h_{max} = 13{,}\overline{3}$ dm

48/13

b) Gesucht ist der Flächeninhalt eines Rechtecks: A = $u \cdot v$

Nebenbedingung: Der obere rechte Punkt P(u|v) liegt auf dem Graph von f, d. h. v = f(u); u muss dabei zwischen 0 und der ersten positiven Nullstelle von f liegen

➔ … A(u) = $-\frac{1}{4}u^4 + \frac{27}{8}u$ mit $D_A =]0; \frac{3}{\sqrt[3]{2}} \approx 2{,}38[$

➔ … $A_{max} = \frac{243}{64} \approx 3{,}80$ für $u_{max} = \frac{3}{2}$ und $v_{max} = \frac{81}{32}$

c) Gesucht ist der Umfang eines Rechtecks: A = $2u + 2v$

Nebenbedingung: Der obere rechte Punkt P(u|v) liegt auf dem Graph von f, d. h. v = f(u); u muss dabei zwischen 0 und der ersten positiven Nullstelle von f liegen

➔ … U(u) = $-\frac{1}{2}u^3 + 2u + \frac{27}{4}$ mit $D_U = [0; \frac{3}{\sqrt[3]{2}} \approx 2{,}38]$

➔ … $U_{max} = \frac{8}{9}\sqrt{3} + \frac{27}{4} \approx 8{,}29$ für $u_{max} = \frac{2}{3}\sqrt{3} \approx 1{,}15$ und $v_{max} = -\frac{2}{9}\sqrt{3} + \frac{27}{8} \approx 2{,}99$

48/14

Gesucht ist der Flächeninhalt eines Dreiecks: A = $\frac{1}{2}gh$

Nebenbedingung: A ist der y-Achsenschnittpunkt, also A(0|3); B liegt auf der x-Achse, also B(x=h|0); C(x=h|y=g) liegt auf dem Graph von f, also g = f(h); x muss dabei zwischen 0 und der ersten positiven Nullstelle von f liegen

➔ … A(h) = $-0{,}1h^3 + 0{,}2h^2 + 1{,}5h$ mit $D_A =]0; 5[$

➔ … A_{max} = 3,6 für C(3|2,4)

48/15
Gesucht ist der Flächeninhalt eines Rechtecks: A = $b \cdot h$
Nebenbedingung: $\frac{b}{4-h} = \frac{3}{4}$ (2. Strahlensatz bzw. Vierstreckensatz)
➔ … $A(h) = 3h - \frac{3}{4}h^2$ mit $D_A =]0;4[$
➔ … $A_{max} = 3$ für $b_{max} = 1{,}5$ und $h_{max} = 2$ (füllt dann 50% der Wandfläche aus)

49/16
Gesucht ist der Flächeninhalt eines Rechtecks: A = $\ell \cdot b$
Nebenbedingung: Der Umfang ist vorgegeben, u = 2 ℓ + 2b
➔ … $A(b) = 0{,}5ub - b^2$ mit $D_A =]0;u/2[$
➔ maximal für $b_{max} = u/4$ ➔ $\ell_{max} = u/4$ ➔ beide Seitenlängen gleich ➔ Quadrat

49/17 vgl. 46/3 und 49/21!
Gesucht ist das Volumen eines Kegels: V = $\frac{1}{3}\pi\, r^2 h$
Nebenbedingung: Seitenkante des Kegels ist 24 cm lang ➔ Satz von Pythagoras verwenden!
➔ … $V(h) = \frac{1}{3}\pi \cdot (-h^3 + 576h)$ mit $D_V =]0;24[$
➔ … $r_{max} = 8\sqrt{6} \approx 19{,}60$ (cm)

49/18
Gesucht ist der Flächeninhalt eines Dreiecks: A = $\frac{1}{2}gh$
Nebenbedingung: Der obere rechte Punkt P(x|y=h) liegt auf dem Graph von f, d. h. h = f(x);
x muss dabei zwischen den Nullstellen von f liegen
a) g = x ➔ … $A(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 2x^2$ mit $D_A =]0;4[$
➔ … $A_{max} = \frac{128}{27}$ für $g_{max} = \frac{8}{3}$ und $h_{max} = \frac{32}{9}$
b) g = x+2 ➔ … $A(g) = -\frac{1}{4}x^3 + 3x + 4$ mit $D_A =]-2;4[$
➔ … $A_{max} = 8$ für $g_{max} = 4$ und $h_{max} = 4$

49/19
Gesucht ist der Flächeninhalt des Querschnitts des Kanals; also ein Rechteck plus ein Halbkreis:
$A = b \cdot h + \frac{1}{2}\pi r^2 = 2rh + \frac{1}{2}\pi r^2$
Nebenbedingung: Der gesamte Umfang soll gleich 5 m sein, also: Grundseite des Kanals plus zweimal Höhe plus Umfang des Halbkreises ist 5 m, also $2r + 2h + \pi r = 5$
➔ … $A(r) = 5r - \frac{1}{2}(\pi + 4)r^2$ mit $D_A =]0;\frac{5}{\pi+2} \approx 0{,}97[$
$r_{max} = \frac{5}{\pi+4} \approx 0{,}70$ m; $h_{max} = \frac{5}{\pi+4} \approx 0{,}70$ m

49/20
Gesucht ist der Flächeninhalt eines Rechtecks. Wenn man das Koordinatensystem so wählt, dass der Ursprung links unten ist, dann ist $A = x \cdot y$.
Nebenbedingung: Der obere rechte Punkt P(x|y) soll am Weg rechts oben liegen. Im gewählten Koordinatensystem kann dieser Weg als Graph der linearen Funktion f mit $f(x) = -0{,}5x + 4$ dargestellt werden. Also ist y = f(x).
➔ … $A(x) = -0{,}5x^2 + 4x$ mit $D_A =]0;5[$ ➔ … $x_{max} = 4$ und $y_{max} = 2$

49/21 vgl. 46/3 und 49/17!
a) Gesucht ist das Volumen eines Kegels: V = $\frac{1}{3}\pi\, r^2 h$
Nebenbedingung: Seitenlinie des Kegels ist 12 cm lang ➔ Satz von Pythagoras verwenden!
➔ … $V(h) = \frac{1}{3}\pi \cdot (-h^3 + 144h)$ mit $D_V =]0;12[$
➔ … $V_{max} = 128\sqrt{3}\pi \approx 696$ cm^3 für $r_{max} = 4\sqrt{6} \approx 9{,}80$ cm und $h_{max} = 4\sqrt{3} \approx 6{,}93$ cm

49/22
Gesucht ist das Volumen eines Quaders: V = $\ell \cdot b \cdot h$
Nebenbedingungen (aus Skizze!): $\ell = 29{,}7 - 2h$, $b = 21{,}0 - 2h$
➔ … $V(h) = 4h^3 - 101{,}4h^2 + 623{,}7h$ mit $D_V =]0;10{,}5[$
➔ … $V_{max} \approx 1128$ cm^3 für $\ell_{max} \approx 21{,}62$ cm, $b_{max} \approx 12{,}92$ cm, $h_{max} \approx 4{,}04$ cm

49/23

a) $p(x) = -0{,}08x^2 + 8$

c) Gesucht ist der Flächeninhalt eines Rechtecks: A = $b \cdot h = 2u \cdot h$

Nebenbedingung: Der rechte obere Punkt P(x=u|y=h+3) liegt auf dem Graph von p, d. h. h = p(u) – 3

➔ … $A(u) = -0{,}16u^3 + 10u$ mit $D_A = \left]0;\ \frac{5}{2}\sqrt{10}\right[$

➔ … $A_{max} \approx 30{,}43\ m^2$ für $u_{max} \approx 4{,}56$ m, $h_{max} \approx 3{,}33$ m, $b_{max} \approx 9{,}13$ m

50/24

Gesucht ist das Volumen eines Kegels: V = $\frac{1}{3}\pi\, r^2 h$

Nebenbedingung: rechter oberer Punkt P(r|h) liegt auf dem Graph von q, d. h. h = p(r)

➔ … $V(r) = \frac{\pi}{3}(-r^4 + 8r^3)$ mit $D_V = [0; 8]$

➔ … $V_{max} = 144\pi \approx 452$ für B(6|12)

50/25

Gesucht ist das Volumen einer Pyramide: V = $\frac{1}{3}Gh = \frac{1}{3}\left(20^2 - \frac{1}{2}x^2\right)h$

Nebenbedingung: Höhe der Pyramide ist Höhe des Dreiecks FEC; diese kann z. B. mit dem Satz von Pythagoras bestimmt werden

➔ … $V(x) = \frac{\sqrt{2}}{12}\,(800x - x^3)$ mit $D_V =]0; 20]$

➔ … $V_{max} = \frac{16\,000}{27}\sqrt{3} \approx 1026\ cm^3$ für $x_{max} = \frac{20}{3}\sqrt{6} \approx 16{,}33$ cm und $h_{max} = \frac{20}{3}\sqrt{3} \approx 11{,}55$ cm

50/26

a) Gesucht ist der Flächeninhalt des Querschnitts des Kanals; also ein Rechteck plus ein Halbkreis:

A = $b \cdot h + \frac{1}{2}\pi r^2 = x \cdot 2x + \frac{1}{2}\pi r^2$

Nebenbedingung: 2r + 4 = 2x ➔ r = x – 2

➔ … $A(x) = (2+0{,}5\pi)\, x^2 - 2\pi x + 2\pi$

b) r > 0 ==> x – 2 > 0 ➔ x > 2; $|\overline{AB}| + |\overline{BC}| + |\overline{DE}| + |\overline{EF}| \leq 12$ ➔ x + 2 + 2 + x ≤ 12 ➔ x ≤ 4

c) … $x_{max} = 4$

50/27

Gesucht ist der Flächeninhalt eines Rechtecks: A = $b \cdot h = 2a \cdot h$

Nebenbedingungen: Der rechte obere Punkt $C(x=a|y_C)$ liegt auf dem Graph von p, der rechte untere Punkt $B(x=a|y_B)$ liegt auf dem Graph von q, d. h. $y_C = p(a)$ und $y_B = q(a)$ ➔ h = p(a) – q(a)

➔… $A(a) = -3a^3 + 12a$ mit $D_A =]0; 2[$

➔… $A_{max} = \frac{16}{3}\sqrt{3} \approx 9{,}24$ für $a_{max} = \frac{2}{3}\sqrt{3} \approx 1{,}15$, $b_{max} = \frac{4}{3}\sqrt{3} \approx 2{,}31$, $\ell_{max} = 4$