<u>Lösen von Ungleichungen</u>

Zu lösen sei eine Ungleichung der Form

$$p(x) > 0,$$

wobei p ein Polynom ist. (Hat man eine Ungleichung der Form $p(x) < 0$ oder $p(x) \leq 0$ oder $p(x) \geq 0$, so gilt das Folgende entsprechend auch).

Ist p vom Grad 1 (also ein **linearer** Term), so kann man die Ungleichung direkt mit Äquivalenzumformungen lösen. Dabei ist nur zu beachten: wird die Ungleichung mit einer negativen Zahl multipliziert / dadurch dividiert, so dreht sich die Richtung des Ungleichungszeichens um.

Beispiel:

$$-3x + 9 > 0 \quad | -9$$
$$-3x > -9 \quad | :(-3)$$
$$x < 3$$
$$\mathbb{L} =]-\infty;3[$$

Ist p ein **Polynom von höherem Grad**, z. B.

$$x^3 - x > 0,$$

so kann die Ungleichung i. A. nicht direkt gelöst werden. Man löst dann zunächst die zugehörige Gleichung

$$p(x) = 0,$$

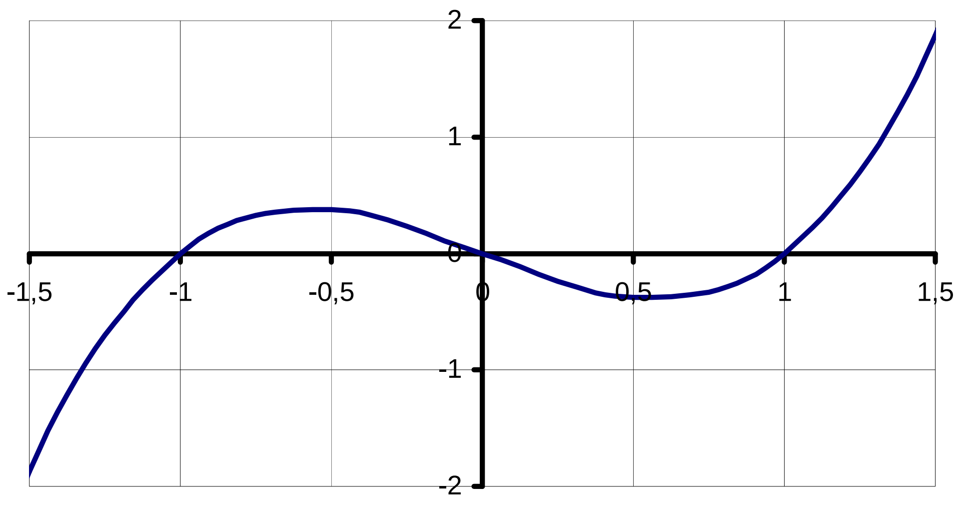
im Beispiel:

$$x^3 - x = 0$$
$$x\,(x^2 - 1) = 0$$
$$x\,(x + 1)\,(x - 1) = 0$$

also $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$.

Dann gibt es drei Möglichkeiten:

1. Die Ungleichung kann graphisch gelöst werden. Dafür fasst man p als Funktionsterm einer ganzrationalen Funktion auf und skizziert ihren Graphen (mit Hilfe ihrer Nullstellen und deren Vielfachheiten). Dann sind die Lösungen der Ungleichung die x-Werte, für die der Graph oberhalb der x-Achse verläuft.
Im Beispiel: die Funktion hat die drei Nullstellen $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, alle sind einfach.
Skizze:



Der Graph verläuft zwischen –1 und 0 und für x > 1 oberhalb der x-Achse, also ist $\mathbb{L} =]-1;0[\cup]1;\infty[$.

2. Man weiss, an welchen Stellen das Polynom gleich Null ist – also muss das Polynom in allen Intervallen zwischen und außerhalb dieser Stellen entweder überall positiv oder überall negativ sein (Anmerkung: das folgt, weil Polynomfunktionen überall stetig sind.) Also muss man pro Intervall nur noch je einen beliebigen Wert einsetzen und kennt damit das Vorzeichen von p in diesem ganzen Intervall.
Im Beispiel: Es gibt drei Nullstellen, also sind vier Intervalle zu betrachten.

- $]-\infty;-1[$: z. B. $p(-2) = (-2)^3 - (-2) = -6 < 0$
- $]-1;0[$: z. B. $p(-0{,}5) = (-0{,}5)^3 - (-0{,}5) = 0{,}625 > 0$
- $]0;1[$: z. B. $p(0{,}5) = 0{,}5^3 - 0{,}5 = -0{,}625 < 0$
- $]1;\infty[$: z. B. $p(2) = 2^3 - 2 = 6 > 0$

Es ergibt sich also: $\mathbb{L} =]-1;0[\cup]1;\infty[$.

3. Man benutzt eine Vorzeichentabelle. Dafür schreibt man den Term p zunächst in faktorisierter Form; dann legt man eine Tabelle an, die für jedes Intervall zwischen und außerhalb der Nullstellen ein Spalte, für jeden Faktor und für den kompletten Term eine Zeile enthält. In die Tabelle trägt man für jeden Faktor das Vorzeichen ein, das dieser Faktor im jeweiligen Intervall hat. Damit kann man dann per Multiplikation das Vorzeichen bestimmen, das der komplette Term im jeweiligen Intervall hat.
Im Beispiel: Die Faktorisierung des Terms ist: $x^3 - x = x\,(x - 1)\,(x + 1)$.

Intervall	$]-\infty;-1[$	$]-1;0[$	$]0;1[$	$]1;\infty[$
x	–	–	+	+
$x - 1$	–	–	–	+
$x + 1$	–	+	+	+
$x^3 - x$	–	+	–	+

Es ergibt sich also: $\mathbb{L} =]-1;0[\cup]1;\infty[$.

Anmerkungen:
1) Manche Ungleichungen lassen sich auch leichter lösen, z. B. quadratische Ungleichungen auch mit Hilfe einer quadratischen Ergänzung.
2) Die drei hier gezeigten Methoden können auch bei komplizierteren Ungleichungen angewandt werden (Methode 2 aber nur, wenn der Term stetig ist); allerdings sind im Allgemeinen außer Nullstellen dann auch noch Polstellen zu beachten.