Zerlegung quadratischer Terme in Linearfaktoren

1) Berechnen Sie die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$x^2 + x – 2 = 0.$$

2) Zeigen Sie durch Ausmultiplizieren der rechten Seite, dass $x^2 + x – 2 = (x – 1)\,(x + 2)$ ist.

Die rechte Seite nennt man eine „Zerlegung des quadratischen Term $x^2 + x – 2$ in Linearfaktoren" (oder auch kurz „Linearfaktorzerlegung" oder „Faktorisierung"): der Term wird als ein Produkt aus den beiden Faktoren $x – 1$ und $x + 2$ dargestellt, die beide linear sind (nur ein x ohne Exponent und Zahlen enthalten).

3) Wie kann man aus diesem faktorisierten Term die in (1) berechneten Lösungen einfach ablesen? (Tipp: „Satz vom Nullprodukt")

4) Berechnen Sie die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$2\,x^2 – 2\,x + 12 = 0.$$

Zeigen Sie anschließend durch Ausmultiplizieren, dass $2\,x^2 + 2\,x – 4 = 2\,(x + 2)\,(x – 3)$ ist, und geben Sie wieder an, wie man aus der faktorisierten Form die berechneten Lösungen einfach ablesen kann.

5) Versuchen Sie eine allgemeine Regel zu formulieren:
„Sind x_1 und x_2 die Lösungen der quadratischen Gleichung $a\,x^2 + b\,x + c = 0$, so kann man lautet die faktorisierte Form des quadratischen Terms $a\,x^2 + b\,x + c = \quad \cdot (\qquad) \cdot (\qquad)$."

Diese Regel sollte natürlich auch bewiesen werden.

Bitte wenden!

6) Zeigen Sie zunächst durch direkte Berechnung: Sind x_1 und x_2 die Lösungen der quadratischen Gleichung $a x^2 + b x + c = 0$, also

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

dann gilt immer:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{und} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \qquad \text{(„Satz von Vieta“)}$$

7) Zeigen Sie anschließend, dass immer gilt: $a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) = a x^2 + b x + c$; verwenden Sie dabei die Ergebnisse aus (6).