Lineare (Un-)Abhängigkeit

1. Versuchen Sie jeweils, den Vektor $\vec{c}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zu schreiben, d. h. suchen Sie Zahlen λ und μ, sodass gilt:

$$\vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$$

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

Welche besondere Beziehung besteht in (b) und (c) jeweils zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$?

Formulieren Sie einen allgemeinen Satz:
Sind $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$ nicht , so kann man jeden Vektor des $\mathbb{R}^2$ als Linearkombination von ihnen darstellen, und diese Linearkombination ist . Sind $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$ dagegen , so kann man nicht jeden Vektor des $\mathbb{R}^2$ als Linearkombination von ihnen darstellen; für die Vektoren, die als Linearkombination darstellbar sind, ist diese außerdem nicht .

2. Versuchen Sie jeweils, den Vektor $\vec{d}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ zu schreiben, d. h. suchen Sie Zahlen λ und μ, sodass gilt:

$$\vec{d} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \nu \vec{c}$$

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 4 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ -8 \end{pmatrix}$

Berechnen Sie außerdem jeweils die Determinante der entsprechenden Koeffizientenmatrix. Welche besondere Beziehung besteht danach in (b) und (c) jeweils zwischen den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$?

Formulieren Sie einen allgemeinen Satz:
Sind $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ nicht , so kann man jeden Vektor des $\mathbb{R}^3$ als Linearkombination von ihnen darstellen, und diese Linearkombination ist . Sind $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ dagegen , so kann man nicht jeden Vektor des $\mathbb{R}^3$ als Linearkombination von ihnen darstellen; für die Vektoren, die als Linearkombination darstellbar sind, ist diese außerdem nicht .

Verallgemeinernd definiert man:
Gegeben sind Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$. Kann man (mindestens) einen dieser Vektoren als Linearkombination der anderen darstellen (also z. B. $\vec{a}_3 = 2\vec{a}_1 - 3\vec{a}_2 + 1\vec{a}_4 + 0\vec{a}_5 + \ldots$), so nennt man die Vektoren linear abhängig. Kann man dagegen keinen der Vektoren als Linearkombination der anderen darstellen, so heißen sie linear unabhängig.

Speziell ergibt sich:

- Ist einer der Vektoren der Nullvektor, so sind die Vektoren immer linear abhängig.
- Ein einzelner Vektor ist immer linear abhängig.
- Zwei Vektoren sind genau dann linear abhängig, wenn sie kollinear sind; wenn von n Vektoren zwei kollinear sind, so sind alle n Vektoren linear abhängig.
- Drei Vektoren sind genau dann linear abhängig, wenn sie komplanar sind; wenn von n Vektoren drei komplanar sind, so sind alle n Vektoren linear abhängig.

Wie man vorne gesehen hat, kann man einen Vektor nur dann eindeutig als Linearkombination von zwei bzw. drei Vektoren schreiben, wenn diese beiden bzw. drei Vektoren nicht kollinear bzw. nicht komplanar sind. Als Verallgemeinerung dieser Tatsache ergibt sich der

Satz:
Sind Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ linear unabhängig, so ist für jeden Vektor $\vec{x}$, den man als Linearkombination

$$\vec{x} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{a}_n$$

aus ihnen schreiben kann, diese Darstellung eindeutig, d. h. diese Gleichung hat nur eine Lösung λ_1, λ_2, ..., λ_n. Sind die Vektoren dagegen linear abhängig, so gibt es mehrere Möglichkeiten, $\vec{x}$ darzustellen.

beachte:
Es wird nicht behauptet, dass man jeden Vektor als Linearkombination von $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ schreiben kann – nur, dass die Darstellung für solche Vektoren, bei denen dies möglich ist, eindeutig ist!

Speziell ergibt sich:

Vektoren sind genau dann linear unabhängig, wenn der Nullvektor eindeutig als Linearkombination darstellbar ist, d. h. das zur Vektorgleichung

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{a}_n = \vec{0}$$

gehörige LGS muss eindeutig lösbar sein (darf also nur die Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$ haben).

Aus der Cramerschen Regel folgt aber: Ein LGS hat genau dann eine eindeutige Lösung, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix ungleich 0 ist! Damit folgt der

Satz: n Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ des $\mathbb{R}^n$ sind genau dann linear unabhängig, wenn die Determinante der Matrix, die aus den Vektoren gebildet wird, ungleich 0 ist.

Spezialfälle:

- Zwei Vektoren des $\mathbb{R}^2$ sind genau dann linear abhängig, wenn sie kollinear sind (s. o.); dann ist aber der Flächeninhalt des von ihnen aufgespannten Parallelogramms gleich 0. Diesen Flächeninhalt berechnet man aber mit dem Kreuzprodukt, was genau die Determinante der Matrix aus den beiden Vektoren ergibt.
- Drei Vektoren des $\mathbb{R}^3$ sind genau dann linear abhängig, wenn sie komplanar sind (s. o.); dann ist aber der Rauminhalt des von ihnen aufgespannten Spats gleich 0. Diesen Rauminhalt berechnet man aber mit dem Spatprodukt, was genau die Determinante der Matrix aus den drei Vektoren ergibt.

beachte: Dieser Satz gilt nur bei n Vektoren des $\mathbb{R}^n$ – wenn es weniger oder mehr Vektoren sind, so ist die Matrix nicht quadratisch, also kann man keine Determinante berechnen!

1. а) 2; –1
2. а) –4; 5; –1