

Lineare (Un-)Abhängigkeit

Verfahren 1: Prüfen mittels der Definition

Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$ sind linear abhängig, wenn man einen von ihnen als Linearkombination der anderen schreiben kann, d. h. wenn eine der Gleichungen

$$\begin{aligned}\vec{a} &= r\vec{b} + s\vec{c} + \dots \\ \vec{b} &= r\vec{a} + s\vec{c} + \dots \\ \vec{c} &= r\vec{a} + s\vec{b} + \dots \\ &\dots\end{aligned}$$

(mindestens) eine Lösung hat; nur dann, wenn **keine** dieser Gleichungen eine Lösung hat, sind die Vektoren linear unabhängig

Dieses Verfahren ist in den allermeisten Fällen zu aufwendig (denn man muss ja, wenn's schlecht läuft, so viele LGS lösen, wie man Vektoren hat!). Nur dann, wenn man nur *zwei* Vektoren hat, geht es sehr schnell, denn dann muss man nur schauen, ob einer der beiden Vektoren ein Vielfaches des anderen ist (also ob die Vektoren *parallel* bzw. *kollinear* sind):

$$\vec{a} = r\vec{b} \text{ oder } \vec{b} = r\vec{a},$$

und das geht normalerweise durch Hinschauen.

Verfahren 2: Prüfen mittels des Satzes

Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$ sind linear abhängig, wenn man den Nullvektor auf unendlich viele Weisen aus ihnen linear kombinieren kann, d. h. wenn die Gleichung

$$r\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c} + \dots = \vec{0}$$

unendlich viele Lösungen hat. Wenn diese Gleichung dagegen nur **genau eine** Lösung hat (das ist dann immer die „triviale“ Lösung $r = 0, s = 0, t = 0, \dots$), sind die Vektoren linear unabhängig. (**Beachte:** Dass diese Gleichung überhaupt keine Lösung hat, kann nicht vorkommen!)

Dieses Verfahren ist praktisch immer, wenn man mehr als zwei Vektoren hat, das deutlich schnellere – denn man muss ja nur ein einziges LGS lösen. Insbesondere dann, wenn es darum geht, ob drei Vektoren *komplanar* sind, sollte man dieses Verfahren verwenden.