<u>Lineare Gleichungssysteme</u>

<u>Bezeichnungen:</u>

- Ein System von n Gleichungen mit m Variablen, die alle nur linear vorkommen (also ohne Potenzen oder anderes), wird kurz als $n \times m$-LGS bezeichnet; die Vorfaktoren der Variablen heißen dabei <u>Koeffizienten</u>.
- Ein LGS heißt <u>quadratisch</u>, wenn es genauso viele Gleichungen wie Variable gibt ($n = m$); es heißt <u>unterbestimmt</u>, wenn es weniger Gleichungen als Variable gibt ($n < m$), und <u>überbestimmt</u>, wenn es mehr gibt ($n > m$).
- Eine <u>Lösung</u> des Systems besteht jeweils aus m Zahlen (die zusammen ein sogenanntes m-Tupel bilden), welche alle n Gleichungen gleichzeitig erfüllen.
- Ein quadratisches LGS ist in <u>Stufenform</u>, wenn eine Gleichung nur noch (höchstens) eine Variable enthält, eine weitere Gleichung dieselbe Variable und (höchstens) eine weitere, eine weitere Gleichung dieselben beiden Variablen und (höchstens) eine weitere usw.
- Ein LGS kann man übersichtlich in einer sogenannten <u>erweiterten Koeffizientenmatrix</u> darstellen: man lässt die Variablen und die Gleich-Zeichen weg und schreibt nur noch die Koeffizienten und die konstanten Zahlen der rechten Seite hin; die Koeffizienten werden von den konstanten Zahlen durch einen senkrechten Strich abgetrennt; außen herum macht man Klammern.

<u>Lösungsmethoden für quadratische LGS:</u>

- Insbesondere bei kleinen LGS (2x2) kann man oft sinnvoll das <u>Gleichsetzungs-</u> oder <u>Einsetzungsverfahren</u> benutzen. Meistens ist aber das <u>Additionsverfahren</u> nützlicher.
- Führt man das Additionsverfahren systematisch durch, so hat man das <u>Gauß-Verfahren</u> (hier für 3x3-LGS):
  Ersetze immer wieder eine Gleichung durch ein Vielfaches ihrer selbst oder durch die Summe / Differenz aus dieser und einer anderen Gleichung. Ziel:
  1) Zunächst in zwei Gleichungen jeweils ***dieselbe*** Variable eliminieren.
  2) Dann ***in einer dieser beiden Gleichungen*** auch noch eine zweite Variable eliminieren.
  Das LGS ist dann in Stufenform und kann durch wiederholtes Einsetzen gelöst werden.
  (*Anmerkung: Man kann auch Gleichungen und / oder die Reihenfolge der Variablen vertauschen.)*
- Führt man das <u>Gauß-Verfahren</u> mit der <u>Matrix</u> durch, dann lautet es folgendermaßen (3x3-LGS):
  Ersetze immer wieder eine Zeile der Matrix durch ein Vielfaches ihrer selbst oder durch die Summe / Differenz aus dieser und einer anderen Zeile. Ziel:
  1) Zunächst in zwei Zeilen ***übereinander*** jeweils eine Null erreichen.
  2) Dann ***in einer dieser beiden Zeilen*** auch noch eine zweite Null erreichen.
  Die Matrix ist dann in Stufenform; nun geht man im Allgemein zurück zum LGS und löst dieses wie bekannt durch wiederholtes Einsetzen. (*Anmerkung: Man kann auch Zeilen und / oder Spalten vertauschen.)*
- Beim <u>Gauß-Jordan-Verfahren</u> macht man, nachdem die Matrix in Stufenform ist, noch weiter mit dem Additionsverfahren, Multiplizieren von Zeilen und / oder Vertauschen von Zeilen und / oder Spalten, bis nur noch auf der Diagonale der Koeffizientenmatrix Einsen stehen und alle anderen Einträge Nullen sind. Auf der rechten Seite kann man dann die Lösungen direkt ablesen.
- Bei der Matrix kann man auch das „<u>Turbo-Gauß</u>“-Verfahren anwenden (auch als „Gauß für Eilige“, „Schweinfurter Depperli-Algorithmus“ oder „Mach drei Kreuze“ bekannt); im folgenden wieder nur für 3x3-LGS: Man macht drei Kreuzchen in der ersten und zweiten Zeile (jeweils von den beiden vordersten Zahlen ausgehen und der Reihe nach mit den Zahlen in der zweiten, in der dritten bzw. in der vierten Zeile); dann multipliziert man „über Kreuz“ (links oben mal rechts unten minus rechts oben mal links unten – auch als „zweireihige Determinante“ bekannt) und schreibt das Ergebnis jeweils rechts unten hin; ganz vorne unten kommt eine Null hin. Dasselbe macht man dann mit der ersten und dritten Zeile. Dann macht man noch mal zwei Kreuze in der zweiten und dritten Zeile; hier fängt man in der zweiten Spalte an, da ja in der ersten Spalte schon Nullen stehen. Danach ist die Matrix in Stufenform. (*beachte: wenn ganz vorne oben schon eine Null steht, dann darf man da keine Kreuzchen machen – ist dann aber auch nicht nötig!)*

- Außerdem gibt es noch das Determinantenverfahren (wieder nur für 3x3-LGS). Hier gelten die Formeln:

$$x_1 = \frac{D_1}{D};\ \ x_2 = \frac{D_2}{D};\ \ x_3 = \frac{D_3}{D}$$

  Dabei ist D die Determinante der Koeffizientenmatrix; D_1 ist die Determinante der Matrix, die entsteht, wenn man in der Koeffizientenmatrix die erste Spalte durch die konstanten Zahlen von rechts ersetzt usw. Die Determinanten der 3x3-Matrizen kann man z. B. mit der Regel von Sarrus berechnen: Man schreibt die ersten beiden Spalten noch mal neben die Matrix hin. Dann multipliziert man der Reihe nach die Zahlen in den drei Hauptdiagonalen (links oben nach rechts unten) und addiert diese drei Werte; dann multipliziert man die Zahlen in den drei Nebendiagonalen (rechts oben nach links unten) und subtrahiert diese drei Werte.
  Beachte: Das Determinantenverfahren ist meist relativ aufwendig, und man verrechnet sich leicht, da man vier Determinanten von 3x3-Matrizen berechnen muss. Außerdem führt es nur dann auf eine Lösung, wenn das LGS wirklich nur genau eine Lösung hat.

Lösbarkeit von quadratischen LGS:

- Ein quadratisches LGS hat immer entweder keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen.
- Die Lösbarkeit kann man mit Hilfe von Determinanten leicht feststellen:
  - Ist $D \neq 0$, so hat das LGS genau eine Lösung.
  - Ist $D = 0$, so gibt es dagegen keine eindeutige Lösung; genauer:
    - sind alle $D_i = 0$ ($i = 1, 2, \ldots$), so gibt es unendlich viele Lösungen;
    - ist dagegen (mindestens) ein $D_i \neq 0$, so gibt es keine Lösung.
- Die Lösbarkeit kann man auch am LGS / an der Matrix in Stufenform (!) ablesen:
  - Gibt es (mindestens) eine Gleichung, in der links nur Null steht, rechts aber eine Zahl ungleich Null (bzw. stehen in der Matrix in (mindestens) einer Zeile links nur Nullen, rechts eine Zahl ungleich Null), so hat das LGS keine Lösung.
  - Gibt es keine solcher Gleichungen, aber (mindestens) eine Gleichung, in der links und rechts nur Null steht (bzw. in der Matrix in (mindestens) einer Zeile nur Nullen), so hat das LGS unendlich viele Lösungen. Man kann dann so viele Variablen frei wählen, wie es solche Zeilen mit Nullen gibt (man setzt diese Variablen jeweils gleich einem Parameter λ, μ, ...); die übrigen Variablen berechnet man dann in Abhängigkeit dieser Parameter.
  - Gibt es keine Gleichung (keine Zeile), in der links nur Nullen stehen, so hat das LGS genau eine Lösung.

unterbestimmte LGS:

Diese löst man wie bekannt (mit Additionsverfahren, Gauß-Verfahren, Turbo-Gauß, ...; schreibt man das LGS als Matrix, so kann es nützlich sein, Zeilen mit Nullen so zu ergänzen, dass man ein quadratisches LGS erhält). Im Unterschied zu quadratischen LGS haben unterbestimmte LGS immer entweder keine oder unendliche viele Lösungen, ***nie*** genau eine Lösung.

überbestimmte LGS:

Man löst zunächst nur einen Teil des LGS, der genauso viele Gleichungen wie Variablen enthält.

- Hat dieser Teil keine Lösung, so hat das gesamte überbestimmte LGS keine Lösung.
- Hat dieser Teil genau eine Lösung, so setzt man die Lösung in die restlichen Gleichungen ein; sind diese auch erfüllt, so hat das gesamte überbestimmte LGS genau diese eine Lösung, ansonsten hat es keine Lösung.
- Hat der Teil unendlich viele Lösungen, so berechnet man diese Lösungen in Abhängigkeit der freien Parameter und setzt diese Ergebnisse in die restlichen Gleichungen ein.
  - Ergeben sich dann eindeutige Werte für die Parameter, so hat das gesamte überbestimmte LGS genau eine Lösung.
  - Ergibt sich unabhängig vom Wert der Parameter eine wahre Aussage, so hat das gesamte überbestimmte LGS unendlich viele Lösungen; ergibt sich eine falsche Aussage, so hat es keine Lösung.