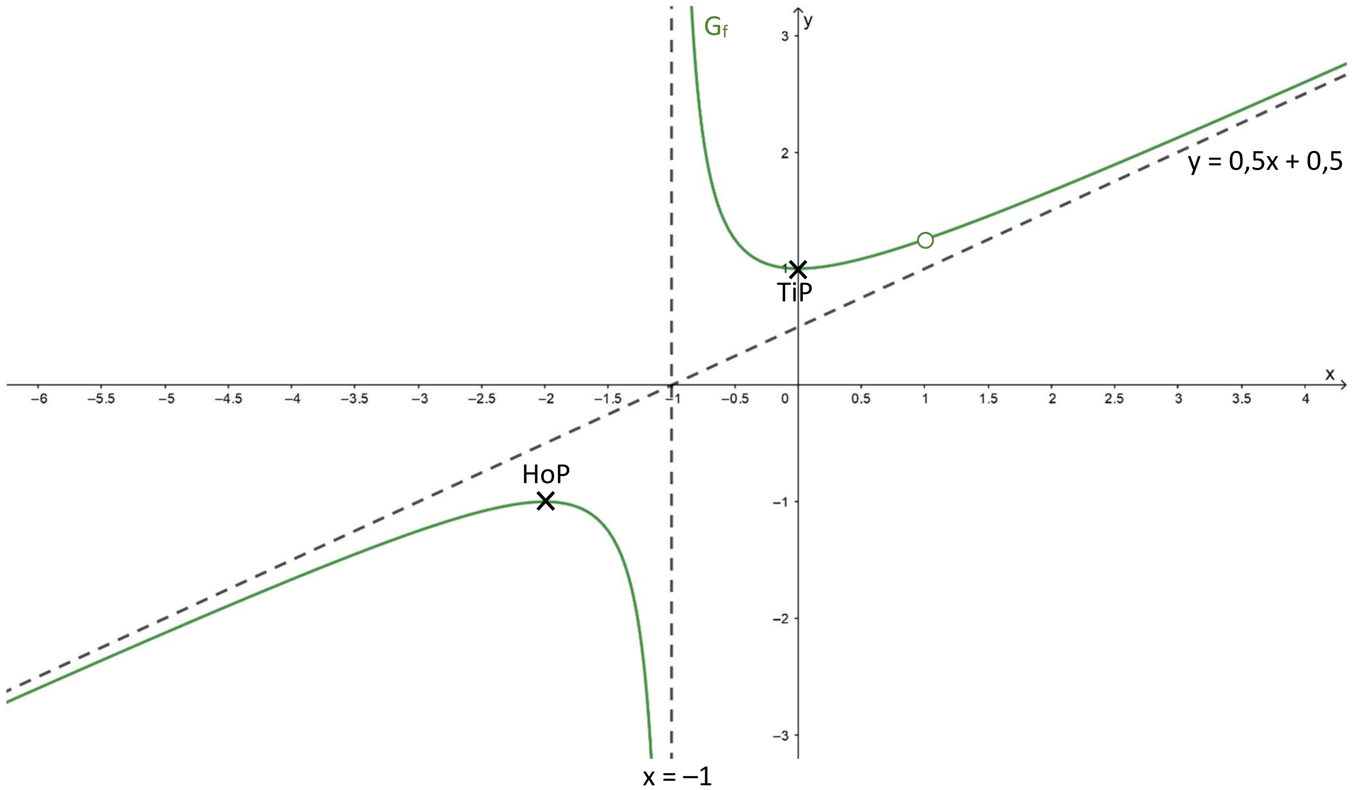
Kurvendiskussion gebrochenrationaler Funktionen

allgemein (Zählergrad: ZG; Nennergrad: NG)	Beispiel: f(x) = $\dfrac{x^3+x^2-2}{2x^2-2}$
1. Definitionsmenge Definitionslücken sind die Nullstellen des Nenners	$2x^2-2=0 \Rightarrow x_1=1,\ x_2=-1 \Rightarrow D_f=\mathbb{R}\setminus\{1;-1\}$
2. Symmetrie (auch D_f muss symm. zu 0 sein!) Zähler und Nenner beide gerade oder beide ungerade: Graph symmetrisch zur y-Achse; einer ungerade, der andere gerade: symmetrisch zum Ursprung; sonst keine Symmetrie zum KS	D_f ist zwar symmetrisch zu 0, aber: Zähler ist weder gerade noch ungerade (, Nenner ist gerade) ➔ keine Symmetrie zum KS
3. Gemeinsame Punkte mit den Achsen <u>mit y-Achse:</u> f(0) berechnen <u>mit x-Achse:</u> Nullstellen von f sind die Nullstellen des Zählers, die zu D_f gehören	$f(0)=(-2)/(-2)=1 \Rightarrow S_y(0\|1)$ $x^3+x^2-2=0 \Rightarrow x_3=1\notin D_f$ ➔ keine Nullstellen
4. Asymptoten / Definitionslücken <u>waagrechte und schiefe Asymptoten:</u> ZG < NG ➔ waagrechte Asymptoe: y = 0 (x-Achse) ZG = NG ➔ waagrechte Asymptote: y = $\frac{LK\ Z}{LK\ N}$ ZG > NG ➔ Polynomdivision nötig; der ganzrationale Teil des Ergebnisses gibt die schräge Asymptote (ZG = NG + 1) bzw. Asymptotenkurve (ZG > NG + 1) an <u>senkrechte Asymptoten:</u> Funktionsterm faktorisieren (i. A. in der Asymptotenform einfacher!) und so viel wie möglich kürzen; die dann noch übrigen Definitionslücken sind Polstellen (gerade Vielfachheit: ohne VZW; ungerade: mit VZW); an jeder Polstelle ist eine senkrechte Asymptote <u>behebbare Definitionslücken:</u> evtl. Funktionswerte mit stetiger Fortsetzung (gekürzte Funktion) berechnen	3 > 2 ➔ Polynomdivision: $f(x)=0{,}5x+0{,}5+\dfrac{x-1}{2x^2-2}$ ➔schräge Asymptote: y = 0,5x + 0,5 Faktorisierung: $f(x)=0{,}5x+0{,}5+\frac{x-1}{2(x+1)(x-1)}$ ➔ $\bar{f}(x)=0{,}5x+0{,}5+\frac{x-1}{2(x+1)(x-1)}$➔ Polstelle $x_2=-1$ (1. Ordnung ➔ VZW) ➔ senkrechte Asymptote: x = –1 bei behebbarer Definitionslücke $x_1=1$: $\bar{f}(1)=\frac{5}{4}$
5. Ableitungen so wenig wie möglich; bei 2. Ableitung für die Ableitung des Nenners meist Kettenregel und kürzen sinnvoll; i. A. ist bei der (gekürzten) Asym.form das Ableiten leichter, aber die folgenden Rechnungen dann evtl. komplizierter	$f'(x)=0{,}5-\dfrac{1}{2(x+1)^2}$; $f''(x)=\dfrac{1}{(x+1)^3}$
6. Extremstellen <u>notwendig:</u> $f'(x_0)=0$ (D_f beachten!) <u>hinreichend:</u> VZW von f ' bei x_0 bzw. $f''(x_0)\neq 0$ (dafür) evtl. Monotonieintervalle bestimmen (Vorzeichentabelle oder graphisch)	$0{,}5-\dfrac{1}{2(x+1)^2}=0 \Rightarrow (x+1)^2=1$ ➔ $x_4=0\in D_f,\ x_5=-2\in D_f$ $f''(0)=1>0,\ f''(-2)=-1<0,\ f(0)=1;\ f(-2)=-1$ ➔ HoP(–2|–1), TiP(0|1) für Vorzeichentabelle / graphische Bestimmung der Monotonieintervalle: f '(x) erst als Bruch schreiben! $f'(x)=\dfrac{(x+1)^2-1}{2(x+1)^2}=\dfrac{x^2+2x}{2(x+1)^2}$ Nenner ist in D_f immer > 0 ➔ VZ wird vom Zähler bestimmt; also: f ' > 0 für x < –2 oder x > 0, f '< 0 für –2 < x < –1 und –1 < x < 0 (D_f beachten!), ➔ G_f ist smf in [–2;–1[und]–1;0], sms in $]-\infty;-2]$ und $[0;\infty[\setminus\{1\}$
6. Wendestellen <u>notwendig:</u> $f''(x_0)=0$ (D_f beachten!) <u>hinreichend:</u> VZW von f '' bei x_0 (bzw. $f'''(x_0)\neq 0$) (dafür) evtl. Krümmungsintervalle bestimmen (Vorzeichentabelle oder graphisch)	$\dfrac{1}{(x+1)^3}\neq 0$ für alle x ➔ keine Wendestellen f '' > 0 für x > –1; f '' < 0 für x < –1 ➔ G_f ist rechtsgekrümmt in $]-\infty;-1[$, linksgekrümmt in $]-1;\infty[\setminus\{1\}$



G_f
y
x
y = 0,5x + 0,5
TiP
HoP
x = −1