

Kurvendiskussion gebrochenrationaler Funktionen

allgemein (Zählergrad: ZG; Nennergrad: NG)	Beispiel: $f(x) = \frac{x^3+x^2-2}{2x^2-2}$
1. Definitionsmenge Definitionslücken sind die Nullstellen des Nenners	$2x^2 - 2 = 0 \rightarrow x_1 = 1, x_2 = -1 \rightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{1; -1\}$
2. Symmetrie (auch D_f muss symm. zu 0 sein!) Zähler und Nenner beide gerade oder beide ungerade: Graph symmetrisch zur y-Achse; einer ungerade, der andere gerade: symmetrisch zum Ursprung; sonst keine Symmetrie zum KS	D_f ist zwar symmetrisch zu 0, aber: Zähler ist weder gerade noch ungerade (, Nenner ist gerade) \rightarrow keine Symmetrie zum KS
3. Gemeinsame Punkte mit den Achsen <u>mit y-Achse:</u> $f(0)$ berechnen <u>mit x-Achse:</u> Nullstellen von f sind die Nullstellen des Zählers, die zu D_f gehören	$f(0) = (-2)/(-2) = 1 \rightarrow S_y(0 1)$ $x^3 + x^2 - 2 = 0 \rightarrow x_3 = 1 \notin D_f$ \rightarrow keine Nullstellen
4. Asymptoten / Definitionslücken <u>waagrechte und schiefe Asymptoten:</u> $ZG < NG \rightarrow$ waagrechte Asymptote: $y = 0$ (x-Achse) $ZG = NG \rightarrow$ waagrechte Asymptote: $y = \frac{LK\ Z}{LK\ N}$ $ZG > NG \rightarrow$ Polynomdivision nötig; der ganzrationale Teil des Ergebnisses gibt die schiefe Asymptote ($ZG = NG + 1$) bzw. Asymptotenkurve ($ZG > NG + 1$) an Für die Annäherung von oben / unten an die Asymptote untersucht man, ob der echt gebrochenrationale Teil (nach der Polynomdivision) jeweils gegen 0^+ bzw. 0^- geht. <u>senkrechte Asymptoten:</u> Funktionsterm faktorisieren (i. A. in der Asymptotenform einfacher!) und so viel wie möglich kürzen; die dann noch übrigen Definitionslücken sind Polstellen (gerade Vielfachheit: ohne VZW; ungerade: mit VZW); an jeder Polstelle ist eine senkrechte Asymptote <u>behebbarer Definitionslücken:</u> evtl. Funktionswerte mit stetiger Fortsetzung (gekürzte Funktion) berechnen	$3 > 2 \rightarrow$ Polynomdivision: $f(x) = 0,5x + 0,5 + \frac{x-1}{2x^2-2}$ \rightarrow schiefe Asymptote: $y = 0,5x + 0,5$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{2x^2-2} = 0^- \rightarrow$ Annäherung an As. von unten $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{2x^2-2} = 0^+ \rightarrow$ Annäherung an As. von oben Faktorisierung: $f(x) = 0,5x + 0,5 + \frac{x-1}{2(x+1)(x-1)}$ $\rightarrow \bar{f}(x) = 0,5x + 0,5 + \frac{1}{2(x+1)} \rightarrow$ Polstelle $x_2 = -1$ (1. Ordnung \rightarrow VZW) \rightarrow senkrechte Asymptote: $x = -1$ bei behebbarer Definitionslücke $x_1 = 1$: $\bar{f}(1) = \frac{5}{4}$
5. Ableitungen so wenig wie möglich; bei 2. Ableitung für die Ableitung des Nenners meist Kettenregel und kürzen sinnvoll; i. A. ist bei der (gekürzten) Asym.form das Ableiten leichter, aber die folgenden Rechnungen dann evtl. komplizierter	$\bar{f}'(x) = 0,5 - \frac{1}{2(x+1)^2}; \bar{f}''(x) = \frac{1}{(x+1)^3}$
6. Extrempunkte / Monotonie <u>notwendig:</u> $f'(x_0) = 0$ (D_f beachten!) <u>hinreichend:</u> VZW von f' bei x_0 bzw. $f''(x_0) \neq 0$ (dafür) evtl. Monotonieintervalle bestimmen (Vorzeichentabelle oder graphisch)	$0,5 - \frac{1}{2(x+1)^2} = 0 \rightarrow (x+1)^2 = 1$ $\rightarrow x_4 = 0 \in D_f, x_5 = -2 \in D_f$ $\bar{f}''(0) = 1 > 0, \bar{f}''(-2) = -1 < 0, f(0) = 1; f(-2) = -1$ \rightarrow HoP(-2 -1), TiP(0 1) für Vorzeichentabelle / graphische Bestimmung der Monotonieintervalle: $f'(x)$ erst als Bruch schreiben! $\bar{f}'(x) = \frac{(x+1)^2 - 1}{2(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{2(x+1)^2}$ Nenner ist in D_f immer $> 0 \rightarrow$ VZ wird vom Zähler bestimmt; also: $\bar{f}' > 0$ für $x < -2$ oder $x > 0$, $\bar{f}' < 0$ für $-2 < x < 0$ $\rightarrow G_f$ ist smf in $[-2; -1[$ und $]-1; 0]$, sms in $] -\infty; -2]$ und $[0; \infty[\setminus \{1\}$ (D_f beachten!)
6. Wendepunkte / Krümmung <u>notwendig:</u> $f''(x_0) = 0$ (D_f beachten!) <u>hinreichend:</u> VZW von f'' bei x_0 (bzw. $f'''(x_0) \neq 0$) (dafür) evtl. Krümmungsintervalle bestimmen (Vorzeichentabelle oder graphisch)	$\frac{1}{(x+1)^3} \neq 0$ für alle $x \rightarrow$ keine Wendestellen $\bar{f}'' > 0$ für $x > -1$; $\bar{f}'' < 0$ für $x < -1$ $\rightarrow G_f$ ist rechtsgekrümmt in $] -\infty; -1[$, linksgekrümmt in $] -1; \infty[\setminus \{1\}$ (D_f beachten!)

