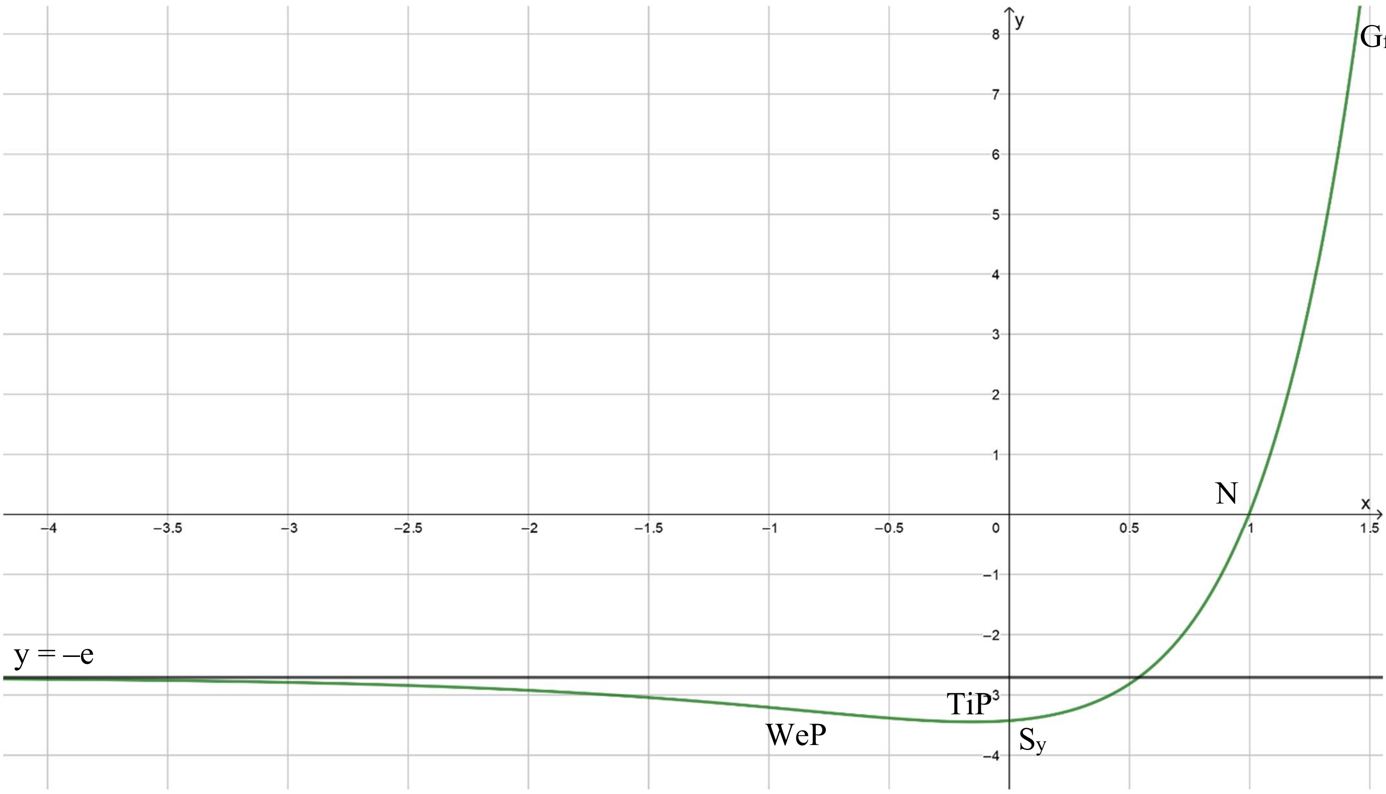
Kurvendiskussion von Funktionen, die aus ganzrationalen und Exponentialfunktionen zusammengesetzt sind

Typ 1: $f(x) = h(e^x)$ mit einer quadratischen Funktion h

Allgemein: $f(x) = a\,e^{2x} + b\,e^x + c$	Beispiel: $f(x) = e^{2x} + (1-e)\cdot e^x - e$
1. Symmetrie Die Graphen von Funktionen dieses Typs können nie symmetrisch zum KS sein, da immer $\boldsymbol{f(-x) \neq f(x)}$ und $\boldsymbol{f(-x) \neq -f(x)}$ gilt.	$f(-x) = e^{-2x} + (1-e)e^{-x} - e$ $\neq f(x)$ und $\neq -f(x)$ ➔ keine Symmetrie zum KS
2. Verhalten für $x \to \pm\infty$ und Asymptote $x \to -\infty$: Beide Summanden mit Exponentialfunktionen gehen gegen 0, die Funktion geht also gegen c. Der Graph hat also die waagrechte Asymptote y = c. $x \to +\infty$: Man klammert e^x aus und schaut sich dann die beiden Faktoren einzeln an.	$\lim\limits_{x\to-\infty}(e^{2x} + (1-e)e^x - e) = 0 - 0 - e = -e$ ➔ w. As.: $y = -e$ $\lim\limits_{x\to\infty}(e^{2x} + (1-e)e^x - e)$ $= \lim\limits_{x\to\infty} \underbrace{e^x}_{\infty} \cdot (\underbrace{e^x}_{\infty} + \underbrace{1 - e}_{1-e} - e \cdot \underbrace{e^{-x}}_{0}) = \infty$
3. Ableitungen Normalerweise genügen zwei. Man sollte immer ausklammern!	$f'(x) = 2\,e^{2x} + (1-e)\,e^x = e^x\,(2e^x + 1 - e)$ $f''(x) = 4\,e^{2x} + (1-e)\,e^x = e^x\,(4e^x + 1 - e)$
4. Gemeinsame Punkte mit den Achsen Gleichung f(x) = 0 lösen: Wenn c = 0 ist, klammert man $a\,e^x$ aus und nutzt den Satz vom Nullprodukt; für $c \neq 0$ substitutiert man $u = e^x$. (Schnittpunkt mit y-Achse: f(0) berechnen)	Substitution: $u = e^x$ ➔ $u^2 + (1-e)\,u - e = 0$ Lösungsformel / Satz von Vieta ➔ $u_1 = e$; $u_2 = -1$ Resubstition: 1) $e^x = e$ ➔ $x_1 = 1$; 2) $e^x = -1$: k. Lsg. ➔ N(1|0) Schnittpunkt mit y-Achse: $f(0) = 1 + (1-e) - e = 2 - 2e$ ➔ $S_y(0\|2-2e) \approx (2{,}72\|-3{,}44)$
5. Extremstellen / Monotonie notwendig: $f'(x_0) = 0$; diese Gleichung kann immer gelöst werden, indem man e^x ausklammert und den Satz vom Nullprodukt verwendet hinreichend: VZW von f ' (vgl. Monotonie unten) bzw. $f''(x_0) \neq 0$ ungerade, VZW von – nach + bzw. $f''(x_0) > 0$: relatives Minimum ungerade, VZW von + nach – bzw. $f''(x_0) < 0$: relatives Maximum gerade, kein VZW: Terrassenstelle danach: y-Werte berechnen (x-Werte in f einsetzen) Monotonieintervalle bestimmen: e^x ausklammern; da dies immer > 0 ist, wird das VZ und damit die Monotonie vom zweiten Faktor bestimmt; dessen VZ aus Skizze bestimmen	$e^x\,(2e^x + 1 - e) = 0$; $e^x > 0$ ➔ $2e^x + 1 - e = 0$ ➔ $x_1 = \ln\frac{e-1}{2} \approx -0{,}15$ $f''\left(\ln\frac{e-1}{2}\right) = \frac{e-1}{2}\left(4\,\frac{e-1}{2} + 1 - e\right)$ $= \frac{e-1}{2}\,(e-1) > 0$ ➔ rel. Minimum (oder Monotonie verwenden, s.u.) $f\left(\ln\frac{e-1}{2}\right) = \left(\frac{e-1}{2}\right)^2 + (1-e)\,\frac{e-1}{2} - e = \cdots$ $= -\frac{(e+1)^2}{4} - e \approx -3{,}46$ ➔ TiP(−0,15|−3,46) $e^x > 0$ ➔ VZ von f ' = VZ von $2e^x + 1 - e$ *Skizze* ➔ f ' < 0 für $x < \ln\frac{e-1}{2}$; f ' > 0 für $x > \ln\frac{e-1}{2}$ ➔ G_f ist smf in $]-\infty; \ln\frac{e-1}{2}]$, sms in $[\ln\frac{e-1}{2}; \infty[$
6. Wendestellen / Krümmung notwendig: $f''(x_0) = 0$; diese Gleichung kann immer gelöst werden, indem man e^x ausklammert und den Satz vom Nullprodukt verwendet hinreichend: VZW von f '' (vgl. Krümmung unten!)	$e^x\,(4e^x + 1 - e) = 0$; $e^x > 0$ ➔ $4e^x + 1 - e = 0$ ➔ $x_1 = \ln\frac{e-1}{4} \approx -0{,}84$ $e^x > 0$ und $4e^x + 1 - e$ hat bei x_1 einen VZW (*Skizze!*) ➔ Wendestelle

danach: y-Werte berechnen (x-Werte in f einsetzen) Krümmungsintervalle bestimmen: e^x ausklammern; da dies immer > 0 ist, wird das VZ und damit die Krümmung vom zweiten Faktor bestimmt; dessen VZ aus Skizze bestimmen	$f\left(\ln\frac{e-1}{4}\right) = \left(\frac{e-1}{4}\right)^2 + (1-e)\frac{e-1}{4} - e = \cdots$ $= -\frac{3(e-1)^2}{16} - e \approx -3{,}27$ ➔ WeP$(-0{,}84 \vert -3{,}27)$ $e^x > 0$ ➔ VZ von f '' = VZ von $4e^x + 1 - e$ *Skizze* ➔ f'' < 0 für $x < \ln\frac{e-1}{4}$; f'' > 0 für $x > \ln\frac{e-1}{4}$ ➔ G_f ist rechtsgekrümmt in $]-\infty; \ln\frac{e-1}{4}]$, linksgekrümmt in $[\ln\frac{e-1}{4}; \infty[$
7. Graph Alle bisherigen Ergebnisse verwenden; evtl. Wertetabelle mit weiteren Punkten erstellen; Maßstab vernünftig wählen!	siehe unten



Typ 2: $f(x) = g(x)\, e^{h(x)} + y_0$ mit maximal quadratischen Funktionen g und h

Allgemein: $f(x) = g(x)\, e^{h(x)} + y_0$	Beispiel: $f(x) = x^2\, e^{-x} - 1$
1. Symmetrie $\boldsymbol{f(-x) = f(x)}$ ➔ G_f ist symmetrisch zur y-Achse $\boldsymbol{f(-x) = -f(x)}$ ➔ G_f ist symmetrisch zum Ursprung	$\boldsymbol{f(-x) = (-x)^2\, e^{-(-x)} - 1}$ $\boldsymbol{= x^2\, e^{x} - 1 \neq f(x)}$ und $\boldsymbol{\neq -f(x)}$ ➔ G_f ist nicht symmetrisch zum KS
2. Verhalten für $x \to \pm\infty$ und Asymptote $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$; $\lim\limits_{x\to\infty} e^x = \infty$; „$e^{\cdots}$ gewinnt gegen jede Potenz" ausnutzen wenn h(x) gegen $-\infty$ geht für $x \to \infty$ bzw. $x \to -\infty$: waagrechte Asymptote $y = y_0$	$\lim\limits_{x\to-\infty} x^2\, e^{-x} - 1 = \infty$ $\lim\limits_{x\to\infty} \underset{\downarrow\atop +\infty}{x^2}\ \underset{\downarrow\atop 0^+}{e^{-x}} - \underset{\downarrow\atop -1}{1} = -1^+$ ($e^{\cdots}$ gewinnt) ➔ waagrechte Asymptote: $y = -1$
3. Ableitungen Normalerweise genügen zwei. Man sollte immer ausklammern und zusammenfassen!	$f'(x) = 2x\, e^{-x} + x^2\, e^{-x} \cdot (-1)$ $= (2x - x^2)\, e^{-x}$ $f''(x) = (2 - 2x)\, e^{-x} + (2x - x^2)\, e^{-x} \cdot (-1)$ $= (x^2 - 4x + 2)\, e^{-x}$
4. Gemeinsame Punkte mit den Achsen Gleichung $f(x) = 0$ lösen: Wenn $y_0 = 0$ ist, nutzt man $e^{\cdots} > 0$ und den Satz vom Nullprodukt, löst also letztlich nur $g(x) = 0$. Wenn $y_0 \neq 0$ ist, ist die Gleichung i. A. nicht lösbar; man kann aber mit Grenzverhalten, VZW, Stetigkeit und evtl. Monotonie argumentieren. (Schnittpunkt mit y-Achse: $f(0)$ berechnen)	$x^2\, e^{-x} - 1 = 0$ ist nicht direkt lösbar Grenzverhalten ➔ zwischen $-\infty$ und $+\infty$ hat f(x) einen VZW ➔ es gibt mindestens eine Nullstelle (weil f stetig ist) $f(0) = -1$ ➔ $S_y(0\|-1)$ (➔ VZW zwischen $-\infty$ und 0 ➔ mindestens eine Nullstelle für $x < 0$, weil f stetig)
5. Extremstellen / Monotonie <u>notwendig:</u> $f'(x_0) = 0$; diese Gleichung kann immer mit dem Satz vom Nullprodukt gelöst werden (s. 4.) <u>hinreichend:</u> VZW von f ' (vgl. Monotonie unten) bzw. $f''(x_0) \neq 0$ ungerade, VZW von – nach + bzw. $f''(x_0) > 0$: relatives Minimum ungerade, VZW von + nach – bzw. $f''(x_0) < 0$: relatives Maximum gerade, kein VZW: Terrassenstelle danach: y-Werte berechnen (x-Werte in f einsetzen) Monotonieintervalle bestimmen: $e^{\cdots} > 0$ verwenden ➔ das VZ und damit die Monotonie wird vom anderen Faktor bestimmt; dessen VZ aus Skizze bestimmen	$(2x - x^2)\, e^{-x} = 0$ ➔ $2x - x^2 = 0$, weil $e^{-x} > 0$ ➔ $x\,(2 - x) = 0$ ➔ $x_1 = 0$; $x_2 = 2$ $f''(0) = 2 > 0$ ➔ rel. Minimum $f''(2) = -2\, e^{-2} < 0$ ➔ rel. Maximum (oder Monotonie verwenden, s. u.) $f(0) = -1$ ➔ $TiP(0\|-1) = S_y$ $f(2) = \frac{4}{e^2} - 1 \approx -0{,}46$ ➔ $HoP(2\|-0{,}46)$ $e^{-x} > 0$ ➔ VZ von f ' = VZ von $2x - x^2$ *Skizze* ➔ $f' < 0$ für $x < 0$ oder $x > 2$; $f' > 0$ für $0 < x < 2$ ➔ G_f ist smf in $]-\infty; 0]$ und $[2; \infty[$, sms in $[0;2]$
6. Wendestellen / Krümmung <u>notwendig:</u> $f''(x_0) = 0$; diese Gleichung kann immer mit dem Satz vom Nullprodukt gelöst werden (s. 4.) <u>hinreichend:</u> VZW von f '' (Vielfachheiten!) (oder $f'''(x_0) \neq 0$) danach: y-Werte berechnen (x-Werte in f einsetzen)	$(x^2 - 4x + 2)e^{-x} = 0$ ➔ $x^2 - 4x + 2 = 0$, weil $e^{-x} > 0$ ➔ $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2}$ ➔ $x_1 \approx 0{,}59$; $x_2 \approx 3{,}41$ jeweils einfache Lösungen ➔ VZW von f '' ➔ Wendestellen $f(2 - \sqrt{2}) = \ldots = \left(6 - 2\sqrt{2}\right)e^{-2+\sqrt{2}} - 1 \approx -0{,}81$ ➔ $WeP_1(0{,}59\|-0{,}81)$

	$f(2+\sqrt{2}) = \ldots = \left(6+2\sqrt{2}\right)e^{-2-\sqrt{2}} - 1 \approx -0{,}62$ ➔ $WeP_2(3{,}41 \mid -0{,}62)$
Krümmungsintervalle bestimmen: $e^{\cdots} > 0$ verwenden ➔ das VZ und damit die Krümmung wird vom anderen Faktor bestimmt; dessen VZ aus Skizze bestimmen	$e^{-x} > 0$ ➔ VZ von f '' = VZ von $x^2 - 4x + 2$ *Skizze* ➔ f '' > 0 für x < 0,59 oder x > 3,41; f '' < 0 für 0,59 < x < 3,41 ➔ G_f ist linksgerümmt in $]-\infty; 0{,}59]$ und $[3{,}41; \infty[$, rechtsgekrümmt in $[0{,}59; 3{,}41]$
7. Graph Alle bisherigen Ergebnisse verwenden; evtl. Wertetabelle mit weiteren Punkten erstellen; Maßstab vernünftig wählen!	siehe unten