

Kurvendiskussion von Funktionen, die aus ganzrationalen und Exponentialfunktionen zusammengesetzt sind

Typ 1: $f(x) = h(e^x)$ mit einer quadratischen Funktion h

<p>Allgemein: $f(x) = a e^{2x} + b e^x + c$</p>	<p>Beispiel: $f(x) = e^{2x} + (1 - e) \cdot e^x - e$</p>
<p>1. Symmetrie Die Graphen von Funktionen dieses Typs können nie symmetrisch zum KS sein, da immer $f(-x) \neq f(x)$ und $f(-x) \neq -f(x)$ gilt.</p>	<p>$f(-x) = e^{-2x} + (1 - e)e^{-x} - e$ $\neq f(x)$ und $\neq -f(x)$ \rightarrow keine Symmetrie zum KS</p>
<p>2. Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$ und Asymptote $x \rightarrow -\infty$: Beide Summanden mit Exponentialfunktionen gehen gegen 0, die Funktion geht also gegen c. Der Graph hat also die waagrechte Asymptote $y = c$. $x \rightarrow +\infty$: Man klammert e^x aus und schaut sich dann die beiden Faktoren einzeln an.</p>	<p>$\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{2x} + (1 - e)e^x - e) = 0 - 0 - e = -e$ \rightarrow w. As.: $y = -e$ $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{2x} + (1 - e)e^x - e)$ $= \lim_{x \rightarrow \infty} e^x \cdot (e^x + 1 - e - e \cdot e^{-x}) = \infty$</p> <div style="text-align: center;"> $\begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \infty & \infty & 1 - e & 0 \end{array}$ </div>
<p>3. Ableitungen Normalerweise genügen zwei. Man sollte immer ausklammern!</p>	<p>$f'(x) = 2 e^{2x} + (1 - e) e^x = e^x (2e^x + 1 - e)$ $f''(x) = 4 e^{2x} + (1 - e) e^x = e^x (4e^x + 1 - e)$</p>
<p>4. Gemeinsame Punkte mit den Achsen Gleichung $f(x) = 0$ lösen: Wenn $c = 0$ ist, klammert man $a e^x$ aus und nutzt den Satz vom Nullprodukt; für $c \neq 0$ substituiert man $u = e^x$. (Schnittpunkt mit y-Achse: $f(0)$ berechnen)</p>	<p>Substitution: $u = e^x \rightarrow u^2 + (1 - e)u - e = 0$ Lösungsformel / Satz von Vieta $\rightarrow u_1 = e; u_2 = -1$ Resubstitution: 1) $e^x = e \rightarrow x_1 = 1$; 2) $e^x = -1$: k. Lsg. $\rightarrow N(1 0)$ Schnittpunkt mit y-Achse: $f(0) = 1 + (1 - e) - e = 2 - 2e \rightarrow S_y(0 2-2e) \approx (2,72 -3,44)$</p>
<p>5. Extrempunkte / Monotonie <u>notwendig</u>: $f'(x_0) = 0$; diese Gleichung kann immer gelöst werden, indem man e^x ausklammert und den Satz vom Nullprodukt verwendet <u>hinreichend</u>: VZW von f' (vgl. Monotonie unten) bzw. $f''(x_0) \neq 0$ ungerade, VZW von $-$ nach $+$ bzw. $f''(x_0) > 0$: relatives Minimum ungerade, VZW von $+$ nach $-$ bzw. $f''(x_0) < 0$: relatives Maximum gerade, kein VZW: Terrassenstelle danach: y-Werte berechnen (x-Werte in f einsetzen)</p> <p>Monotonieintervalle bestimmen: e^x ausklammern; da dies immer > 0 ist, wird das VZ und damit die Monotonie vom zweiten Faktor bestimmt; dessen VZ aus Skizze bestimmen</p>	<p>$e^x (2e^x + 1 - e) = 0; e^x > 0 \rightarrow 2e^x + 1 - e = 0$ $\rightarrow x_1 = \ln \frac{e-1}{2} \approx -0,15$ $f''\left(\ln \frac{e-1}{2}\right) = \frac{e-1}{2} \left(4 \frac{e-1}{2} + 1 - e\right)$ $= \frac{e-1}{2} (e-1) > 0 \rightarrow$ rel. Minimum (oder Monotonie verwenden, s.u.)</p> <p>$f\left(\ln \frac{e-1}{2}\right) = \left(\frac{e-1}{2}\right)^2 + (1 - e) \frac{e-1}{2} - e = \dots$ $= -\frac{(e+1)^2}{4} - e \approx -3,46 \rightarrow \text{TiP}(-0,15 -3,46)$</p> <p>$e^x > 0 \rightarrow$ VZ von $f' =$ VZ von $2e^x + 1 - e$ Skizze $\rightarrow f' < 0$ für $x < \ln \frac{e-1}{2}$; $f' > 0$ für $x > \ln \frac{e-1}{2}$ $\rightarrow G_f$ ist smf in $]-\infty; \ln \frac{e-1}{2}]$, sms in $[\ln \frac{e-1}{2}; \infty[$</p>
<p>6. Wendepunkte / Krümmung <u>notwendig</u>: $f''(x_0) = 0$; diese Gleichung kann immer gelöst werden, indem man e^x ausklammert und den Satz vom Nullprodukt verwendet <u>hinreichend</u>: VZW von f'' (vgl. Krümmung unten!)</p>	<p>$e^x (4e^x + 1 - e) = 0; e^x > 0 \rightarrow 4e^x + 1 - e = 0$ $\rightarrow x_1 = \ln \frac{e-1}{4} \approx -0,84$ $e^x > 0$ und $4e^x + 1 - e$ hat bei x_1 einen VZW (Skizze!) \rightarrow Wendestelle</p>

danach: y-Werte berechnen (x-Werte in f einsetzen)

$$f\left(\ln \frac{e-1}{4}\right) = \left(\frac{e-1}{4}\right)^2 + (1-e)\frac{e-1}{4} - e = \dots$$

$$= -\frac{3(e-1)^2}{16} - e \approx -3,27$$

→ WeP(-0,84|-3,27)

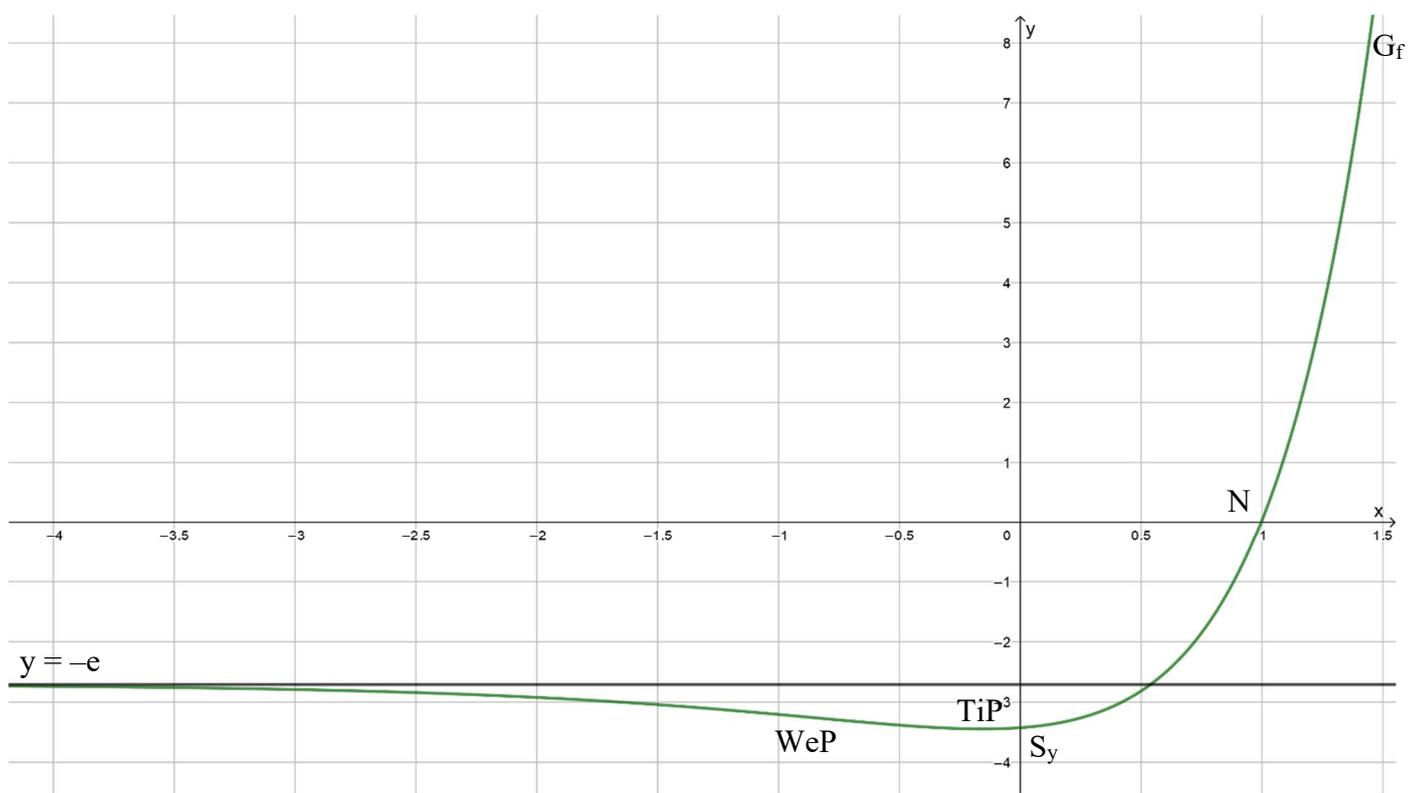
Krümmungsintervalle bestimmen: e^x ausklammern; da dies immer > 0 ist, wird das VZ und damit die Krümmung vom zweiten Faktor bestimmt; dessen VZ aus Skizze bestimmen

$e^x > 0$ → VZ von $f'' = 4e^x + 1 - e$
 Skizze → $f'' < 0$ für $x < \ln \frac{e-1}{4}$; $f'' > 0$ für $x > \ln \frac{e-1}{4}$
 → G_f ist rechtsgekrümmt in $]-\infty; \ln \frac{e-1}{4}[$,
 linksgekrümmt in $[\ln \frac{e-1}{4}; \infty[$

7. Graph

Alle bisherigen Ergebnisse verwenden; evtl. Wertetabelle mit weiteren Punkten erstellen; Maßstab vernünftig wählen!

siehe unten



Typ 2: $f(x) = g(x) e^{h(x)} + y_0$ mit maximal quadratischen Funktionen g und h

<p>Allgemein: $f(x) = g(x) e^{h(x)} + y_0$</p>	<p>Beispiel: $f(x) = x^2 e^{-x} - 1$</p>
<p>1. Symmetrie $f(-x) = f(x) \rightarrow G_f$ ist symmetrisch zur y-Achse $f(-x) = -f(x) \rightarrow G_f$ ist symmetrisch zum Ursprung</p>	<p>$f(-x) = (-x)^2 e^{-(-x)} - 1$ $= x^2 e^x - 1 \neq f(x)$ und $\neq -f(x)$ $\rightarrow G_f$ ist nicht symmetrisch zum KS</p>
<p>2. Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$ und Asymptote $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$; $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$; „$e^{\dots}$ gewinnt gegen jede Potenz“ ausnutzen wenn $h(x)$ gegen $-\infty$ geht für $x \rightarrow \infty$ bzw. $x \rightarrow -\infty$: waagrechte Asymptote $y = y_0$</p>	<p>$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{-x} - 1 = \infty$ $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x} - 1 = -1^+$ (e^{\dots} gewinnt) $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$ $+\infty \quad 0^+ \quad -1$ \rightarrow waagrechte Asymptote: $y = -1$</p>
<p>3. Ableitungen Normalerweise genügen zwei. Man sollte immer ausklammern und zusammenfassen!</p>	<p>$f'(x) = 2x e^{-x} + x^2 e^{-x} \cdot (-1)$ $= (2x - x^2) e^{-x}$ $f''(x) = (2 - 2x) e^{-x} + (2x - x^2) e^{-x} \cdot (-1)$ $= (x^2 - 4x + 2) e^{-x}$</p>
<p>4. Gemeinsame Punkte mit den Achsen Gleichung $f(x) = 0$ lösen: Wenn $y_0 = 0$ ist, nutzt man $e^{\dots} > 0$ und den Satz vom Nullprodukt, löst also letztlich nur $g(x) = 0$. Wenn $y_0 \neq 0$ ist, ist die Gleichung i. A. nicht lösbar; man kann aber mit Grenzverhalten, VZW, Stetigkeit und evtl. Monotonie argumentieren. (Schnittpunkt mit y-Achse: $f(0)$ berechnen)</p>	<p>$x^2 e^{-x} - 1 = 0$ ist nicht direkt lösbar Grenzverhalten \rightarrow zwischen $-\infty$ und $+\infty$ hat $f(x)$ einen VZW \rightarrow es gibt mindestens eine Nullstelle (weil f stetig ist) $f(0) = -1 \rightarrow S_y(0 -1)$ (\rightarrow VZW zwischen $-\infty$ und $0 \rightarrow$ mindestens eine Nullstelle für $x < 0$, weil f stetig)</p>
<p>5. Extrempunkte / Monotonie <u>notwendig</u>: $f'(x_0) = 0$; diese Gleichung kann immer mit dem Satz vom Nullprodukt gelöst werden (s. 4.) <u>hinreichend</u>: VZW von f' (vgl. Monotonie unten) bzw. $f''(x_0) \neq 0$ ungerade, VZW von $-$ nach $+$ bzw. $f''(x_0) > 0$: relatives Minimum ungerade, VZW von $+$ nach $-$ bzw. $f''(x_0) < 0$: relatives Maximum gerade, kein VZW: Terrassenstelle danach: y-Werte berechnen (x-Werte in f einsetzen) Monotonieintervalle bestimmen: $e^{\dots} > 0$ verwenden \rightarrow das VZ und damit die Monotonie wird vom anderen Faktor bestimmt; dessen VZ aus Skizze bestimmen</p>	<p>$(2x - x^2) e^{-x} = 0 \rightarrow 2x - x^2 = 0$, weil $e^{-x} > 0$ $\rightarrow x(2 - x) = 0 \rightarrow x_1 = 0; x_2 = 2$ $f''(0) = 2 > 0 \rightarrow$ rel. Minimum $f''(2) = -2 e^{-2} < 0 \rightarrow$ rel. Maximum (oder Monotonie verwenden, s. u.) $f(0) = -1 \rightarrow \text{TiP}(0 -1) = S_y$ $f(2) = \frac{4}{e^2} - 1 \approx -0,46 \rightarrow \text{HoP}(2 -0,46)$ $e^{-x} > 0 \rightarrow$ VZ von $f' =$ VZ von $2x - x^2$ Skizze $\rightarrow f' < 0$ für $x < 0$ oder $x > 2$; $f' > 0$ für $0 < x < 2 \rightarrow G_f$ ist smf in $] -\infty; 0]$ und $[2; \infty[$, sms in $[0; 2]$</p>
<p>6. Wendepunkte / Krümmung <u>notwendig</u>: $f''(x_0) = 0$; diese Gleichung kann immer mit dem Satz vom Nullprodukt gelöst werden (s. 4.) <u>hinreichend</u>: VZW von f'' (Vielfachheiten!) (oder $f'''(x_0) \neq 0$) danach: y-Werte berechnen (x-Werte in f einsetzen)</p>	<p>$(x^2 - 4x + 2) e^{-x} = 0 \rightarrow x^2 - 4x + 2 = 0$, weil $e^{-x} > 0$ $\rightarrow x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2} \rightarrow x_1 \approx 0,59; x_2 \approx 3,41$ jeweils einfache Lösungen \rightarrow VZW von f'' \rightarrow Wendestellen $f(2 - \sqrt{2}) = \dots = (6 - 2\sqrt{2}) e^{-2+\sqrt{2}} - 1 \approx -0,81$ $\rightarrow \text{WeP}_1(0,59 -0,81)$</p>

<p>Krümmungsintervalle bestimmen: $e^{\dots} > 0$ verwenden \rightarrow das VZ und damit die Krümmung wird vom anderen Faktor bestimmt; dessen VZ aus Skizze bestimmen</p>	<p>$f(2 + \sqrt{2}) = \dots = (6 + 2\sqrt{2})e^{-2-\sqrt{2}} - 1 \approx -0,62$ $\rightarrow \text{WeP}_2(3,41 -0,62)$</p> <p>$e^{-x} > 0 \rightarrow$ VZ von $f'' =$ VZ von $x^2 - 4x + 2$ <i>Skizze</i> $\rightarrow f'' > 0$ für $x < 0,59$ oder $x > 3,41$; $f'' < 0$ für $0,59 < x < 3,41 \rightarrow G_f$ ist linksgerümmt in $] -\infty; 0,59]$ und $[3,41; \infty[$, rechtsgerümmt in $[0,59; 3,41]$</p>
<p>7. Graph Alle bisherigen Ergebnisse verwenden; evtl. Wertetabelle mit weiteren Punkten erstellen; Maßstab vernünftig wählen!</p>	<p>siehe unten</p>

