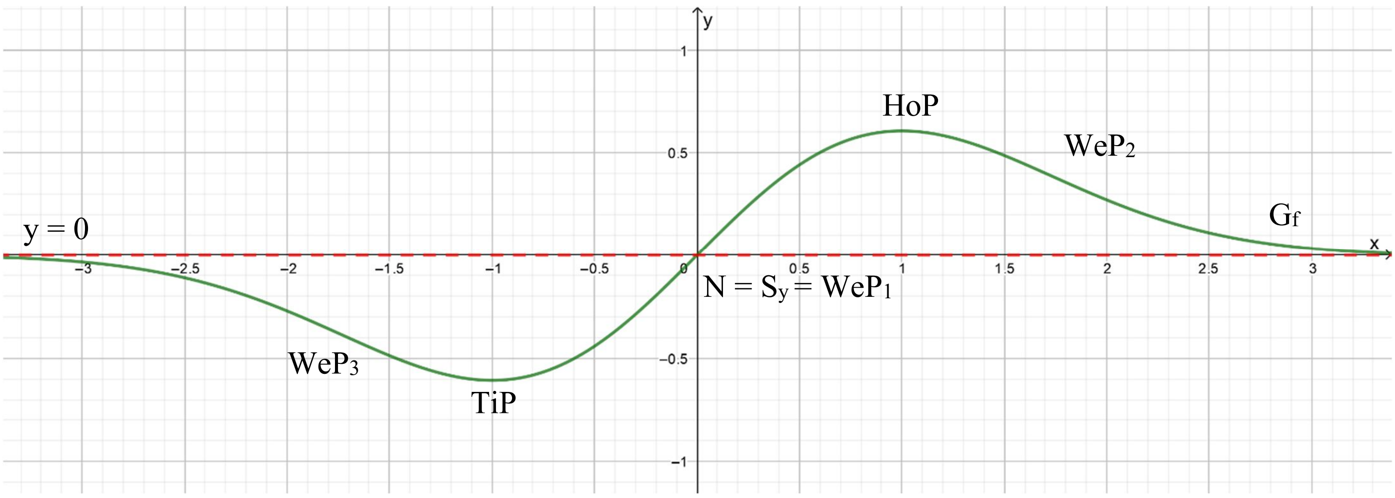
Kurvendiskussion von Funktionen, die aus ganzrationalen und Exponentialfunktionen zusammengesetzt sind

Laut Lehrplan sollen nur Funktionen mit Termen der Form $f(x) = g(x)\, e^{h(x)} + y_0$ behandelt werden, wobei g und h maximal quadratische Funktionen sind und y_0 eine Konstante ist.

Allgemein: $f(x) = g(x)\, e^{h(x)} + y_0$	Beispiel 1: $f(x) = x\, e^{-x^2/2}$
1. Symmetrie $\boldsymbol{f(-x) = f(x)}$ ➔ G_f ist symmetrisch zur y-Achse $\boldsymbol{f(-x) = -f(x)}$ ➔ G_f ist symmetrisch zum Ursprung	$f(-x) = (-x) \cdot e^{-\cdot(-x)^2/2} = -x\, e^{-x^2/2} = -f(x)$ ➔ G_f ist symmetrisch zum Ursprung
2. Verhalten für $x \to \pm\infty$ und Asymptote $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$; $\lim\limits_{x\to\infty} e^x = \infty$; „$e^x$ gewinnt gegen jede Potenz" ausnutzen wenn h(x) gegen $-\infty$ geht für $x \to \infty$ bzw. $x \to -\infty$: waagrechte Asymptote $y = y_0$	$\lim\limits_{x\to-\infty} \underbrace{x}_{-\infty}\, \underbrace{e^{-x^2/2}}_{0^+} = 0^-$ (e gewinnt) $\lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{x}_{+\infty}\, \underbrace{e^{-x^2/2}}_{0^+} = 0^+$ (e gewinnt) ➔ w. As.: y = 0 (x-Achse)
3. Ableitungen Normalerweise genügen zwei. Man sollte immer ausklammern und zusammenfassen!	$f'(x) = x'\, e^{-x^2/2} + x\left(e^{-x^2/2}\right)'$ $= 1 \cdot e^{-x^2/2} + x \cdot e^{-x^2/2} \cdot (-x)$ $= (1 - x^2)e^{-x^2/2}$ $f''(x) = (1 - x^2)'e^{-x^2/2} + (1 - x^2)\left(e^{-x^2/2}\right)'$ $= -2x \cdot e^{-x^2/2} + (1 - x^2) \cdot e^{-x^2/2} \cdot (-x)$ $= (x^3 - 3x) \cdot e^{-x^2/2}$
4. Gemeinsame Punkte mit den Achsen Gleichung f(x) = 0 lösen: Wenn $y_0 = 0$ ist, nutzt man $e^{\cdots} > 0$ und den Satz vom Nullprodukt, löst also letztlich nur g(x) = 0. Wenn $y_0 \neq 0$ ist, ist die Gleichung i. A. nicht lösbar; man kann aber mit Grenzverhalten, VZW, Stetigkeit und evtl. Monotonie argumentieren. (Schnittpunkt mit y-Achse: f(0) berechnen)	$x\, e^{-x^2/2} = 0$; $e^{-x^2/2} > 0$ ➔ $x_1 = 0$ ➔ N(0|0) Schnittpunkt mit y-Achse: $f(0) = 0\, e^{-0^2/2} = 0$ ➔ $S_y(0\|0) = N$
5. Extremstellen / Monotonie <u>notwendig:</u> $f'(x_0) = 0$; diese Gleichung kann immer mit dem Satz vom Nullprodukt gelöst werden (s. 4.) <u>hinreichend:</u> VZW von f ' (vgl. Monotonie unten) bzw. $f''(x_0) \neq 0$ ungerade, VZW von – nach + bzw. $f''(x_0) > 0$: relatives Minimum ungerade, VZW von + nach – bzw. $f''(x_0) < 0$: relatives Maximum gerade, kein VZW: Terrassenstelle danach: y-Werte berechnen (x-Werte in f einsetzen)	$(1 - x^2)e^{-x^2/2} = 0$; $e^{-x^2/2} > 0$ ➔ $1 - x^2 = 0$ ➔ $x_{1,2} = \pm 1$ $f''(1) = (4 \cdot 1 - 6 \cdot 1)\, e^{-1^2/2} = \cdots = -2\, e^{-1/2}$ < 0 ➔ rel. Maximum $f''(1) = \cdots = 2\, e^{-1/2} > 0$ ➔ rel. Minimum (oder Monotonie verwenden, s.u.) $f(1) = 1 \cdot e^{-1^2/2} = e^{-1/2} \approx 0{,}61$ ➔ HoP(1|0,61) $f(-1) \approx -0{,}61$ ➔ TiP(−1|−0,61) (oder Symmetrie ausnutzen!)

Monotonieintervalle bestimmen: e··· > 0 verwenden ➔ das VZ und damit die Monotonie wird vom anderen Faktor bestimmt; dessen VZ aus Skizze bestimmen	$e^{-x^2/2} > 0$ ➔ VZ von f ’ = VZ von $1 - x^2$ *Skizze* ➔ f ‘ < 0 für x < -1 oder x > 1; f ‘ > 0 für $-1 < x < 1$ ➔ G_f ist smf in $]-\infty; -1]$ und in $[1; \infty[$, sms in $[-1; 1]$
6. Wendestellen / Krümmung <u>notwendig:</u> f ’’(x_0) = 0; diese Gleichung kann immer mit dem Satz vom Nullprodukt gelöst werden (s. 4.) <u>hinreichend:</u> VZW von f ’’ (Vielfachheiten!) (oder f ’’’(x_0) ≠ 0) danach: y-Werte berechnen (x-Werte in f einsetzen) Krümmungsintervalle bestimmen: e··· > 0 verwenden ➔ das VZ und damit die Krümmung wird vom anderen Faktor bestimmt; dessen VZ aus Skizze bestimmen	$(x^3 - 3x) \cdot e^{-x^2/2} = 0$; $e^{-x^2/2} > 0$ ➔ $x^3 - 4x = 0$ ➔ $x_1 = 0$; $x_{2,3} = \pm\sqrt{3} \approx \pm 1{,}73$ alle einfach ➔ jeweils VZW von f‘‘ ➔ Wendestellen $f(0) = 0$ ➔ $WeP_1(0\|0) = N = S_y$ $f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}\, e^{-\sqrt{3}^2/2} = \sqrt{3}\, e^{-1{,}5} \approx 0{,}39$ ➔ $WeP_2(1{,}73\|0{,}39)$; Symmetrie ➔ $WeP_3(-1{,}73\|-0{,}39)$ $e^{-x^2/2} > 0$ ➔ VZ von f ’’ = VZ von $x^3 - 4x$ *Skizze* ➔ f‘‘ < 0 für $x < -\sqrt{3}$ und $0 < x < \sqrt{3}$; f‘‘ > 0 für $-\sqrt{3} < x < 0$ und $x > \sqrt{3}$ ➔ G_f ist rechtsgekrümmt in $]-\infty; -\sqrt{3}]$ und in $[0; \sqrt{3}]$, linksgekrümmt in $[-\sqrt{3}; 0]$ und in $[\sqrt{3}; \infty[$
7. Graph Alle bisherigen Ergebnisse verwenden; evtl. Wertetabelle mit weiteren Punkten erstellen; Maßstab vernünftig wählen!	siehe unten



Allgemein: $f(x) = g(x)\, e^{h(x)} + y_0$	Beispiel 2: $f(x) = x^2\, e^{-x} - 1$
1. Symmetrie $f(-x) = f(x)$ ➔ G_f ist symmetrisch zur y-Achse $f(-x) = -f(x)$ ➔ G_f ist symmetrisch zum Ursprung	$f(-x) = (-x)^2\, e^{-(-x)} - 1$ $= x^2\, e^{x} - 1 \neq f(x)$ und $\neq -f(x)$ ➔ G_f ist nicht symmetrisch zum KS
2. Verhalten für $x \to \pm\infty$ und Asymptote $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$; $\lim\limits_{x\to\infty} e^x = \infty$; „$e^x$ gewinnt gegen jede Potenz" ausnutzen wenn h(x) gegen $-\infty$ geht für $x \to \infty$ bzw. $x \to -\infty$: waagrechte Asymptote $y = y_0$	$\lim\limits_{x\to-\infty} x^2\, e^{-x} - 1 = \infty$ $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\, e^{-x} - 1 = -1^+$ ($e^{\cdots}$ gewinnt) $+\infty \quad 0^+ \quad -1$ ➔ waagrechte Asymptote: $y = -1$
3. Ableitungen Normalerweise genügen zwei. Man sollte immer ausklammern und zusammenfassen!	$f'(x) = 2x\, e^{-x} + x^2\, e^{-x} \cdot (-1)$ $= (2x - x^2)\, e^{-x}$ $f''(x) = (2 - 2x)\, e^{-x} + (2x - x^2)\, e^{-x} \cdot (-1)$ $= (x^2 - 4x + 2)\, e^{-x}$
4. Gemeinsame Punkte mit den Achsen Gleichung f(x) = 0 lösen: Wenn $y_0 = 0$ ist, nutzt man $e^{\cdots} > 0$ und den Satz vom Nullprodukt, löst also letztlich nur g(x) = 0. Wenn $y_0 \neq 0$ ist, ist die Gleichung i. A. nicht lösbar; man kann aber mit Grenzverhalten, VZW, Stetigkeit und evtl. Monotonie argumentieren. (Schnittpunkt mit y-Achse: f(0) berechnen)	$x^2\, e^{-x} - 1 = 0$ ist nicht direkt lösbar Grenzverhalten ➔ zwischen $-\infty$ und $+\infty$ hat f(x) einen VZW ➔ es gibt mindestens eine Nullstelle (weil f stetig ist) $f(0) = -1$ ➔ $S_y(0\|-1)$ (➔ VZW zwischen $-\infty$ und 0 ➔ mindestens eine Nullstelle für $x < 0$, weil f stetig)
5. Extremstellen / Monotonie <u>notwendig:</u> $f'(x_0) = 0$; diese Gleichung kann immer mit dem Satz vom Nullprodukt gelöst werden (s. 4.) <u>hinreichend:</u> VZW von f ' (vgl. Monotonie unten) bzw. $f''(x_0) \neq 0$ ungerade, VZW von – nach + bzw. $f''(x_0) > 0$: relatives Minimum ungerade, VZW von + nach – bzw. $f''(x_0) < 0$: relatives Maximum gerade, kein VZW: Terrassenstelle danach: y-Werte berechnen (x-Werte in f einsetzen) Monotonieintervalle bestimmen: $e^x > 0$ verwenden ➔ das VZ und damit die Monotonie wird vom anderen Faktor bestimmt; dessen VZ aus Skizze bestimmen	$(2x - x^2)\, e^{-x} = 0$ ➔ $2x - x^2 = 0$, weil $e^{-x} > 0$ ➔ $x\,(2 - x) = 0$ ➔ $x_1 = 0$; $x_2 = 2$ $f''(0) = 2 > 0$ ➔ rel. Minimum $f''(2) = -2\, e^{-2} < 0$ ➔ rel. Maximum (oder Monotonie verwenden, s. u.) $f(0) = -1$ ➔ $TiP(0\|-1) = S_y$ $f(2) = \frac{4}{e^2} - 1 \approx -0{,}46$ ➔ $HoP(2\|-0{,}46)$ $e^{-x} > 0$ ➔ VZ von f ' = VZ von $2x - x^2$ *Skizze* ➔ $f' < 0$ für $x < 0$ oder $x > 2$; $f' > 0$ für $0 < x < 2$ ➔ G_f ist smf in $]-\infty; 0]$ und $[2; \infty[$, sms in $[0;2]$
6. Wendestellen / Krümmung <u>notwendig:</u> $f''(x_0) = 0$; diese Gleichung kann immer mit dem Satz vom Nullprodukt gelöst werden (s. 4.) <u>hinreichend:</u> VZW von f '' (Vielfachheiten!) (oder $f'''(x_0) \neq 0$) danach: y-Werte berechnen (x-Werte in f einsetzen)	$(x^2 - 4x + 2)e^{-x} = 0$ ➔ $x^2 - 4x + 2 = 0$, weil $e^{-x} > 0$ ➔ $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2}$ ➔ $x_1 \approx 0{,}59$; $x_2 \approx 3{,}41$ jeweils einfache Lösungen ➔ VZW von f '' ➔ Wendestellen $f(2 - \sqrt{2}) = \ldots = \left(6 - 2\sqrt{2}\right)e^{-2+\sqrt{2}} - 1 \approx -0{,}81$ ➔ $WeP_1(0{,}59\|-0{,}81)$ $f(2 + \sqrt{2}) = \ldots = \left(6 + 2\sqrt{2}\right)e^{-2-\sqrt{2}} - 1 \approx -0{,}62$ ➔ $WeP_2(3{,}41\|-0{,}62)$

Krümmungsintervalle bestimmen: $e^x > 0$ verwenden ➔ das VZ und damit die Krümmung wird vom anderen Faktor bestimmt; dessen VZ aus Skizze bestimmen	$e^{-x} > 0$ ➔ VZ von f '' = VZ von $x^2 - 4x + 2$ *Skizze* ➔ f '' > 0 für x < 0,59 oder x > 3,41; f '' < 0 für 0,59 < x < 3,41 ➔ G_f ist linksgerümmt in $]-\infty; 0{,}59]$ und $[3{,}41; \infty[$, rechtsgekrümmt in [0,59;3,41]
7. Graph Alle bisherigen Ergebnisse verwenden; evtl. Wertetabelle mit weiteren Punkten erstellen; Maßstab vernünftig wählen!	siehe unten