

Kurvendiskussion

allgemein	Beispiel: $f(x) = 2x^4 + 7x^3 + 5x^2 = x^2(2x^2 + 7x + 5)$
1. Symmetrie nur gerade Exponenten im Funktionsterm: Graph symm. zur y-Achse; nur ungerade Exponenten: symm. zum Ursprung; sonst: keine Symm. zum KS	Es kommen gerade und ungerade Exponenten vor, also liegt keine Symmetrie zum KS vor.
2. Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$ (und $x \rightarrow 0$) Das Verhalten ganz links/rechts wird bestimmt vom Summanden mit der höchsten Potenz (, das Verhalten nahe der y-Achse vom Summanden mit der kleinsten Potenz.)	Ganz links/rechts verhält sich der Graph wie der von $2x^4$, kommt also von links oben und geht nach rechts oben (, nahe der y-Achse verhält sich der Graph wie der von $5x^2$, berührt also den Ursprung von oben \rightarrow TiP).
3. Ableitungen Man braucht höchstens drei.	$f'(x) = 8x^3 + 21x^2 + 10x = x(8x^2 + 21x + 10)$ $f''(x) = 24x^2 + 42x + 10 = 2(12x^2 + 21x + 5)$ ($f'''(x) = 48x + 42$)
4. Gemeinsame Punkte mit den Achsen Gleichung $f(x) = 0$ lösen; evtl. Steigungen in den Nullstellen berechnen (Schnittpunkt mit y-Achse: a_0 ablesen bzw. $f(0)$ berechnen)	$x^2(2x^2 + 7x + 5) = 0$ liefert Nst.: $x_{1,2} = 0$ (doppelt, also ist dort ein Exp); $x_3 = -1$; $x_4 = -2,5$ (beide einfach), also Punkte: $N_1(0 0)$; $N_2(-1 0)$; $N_3(-2,5 0)$ Steigungen dort: 1) $f'(0) = 0$ 2) $f'(-1) = 3$ 3) $f'(-2,5) = -18,75$ Schnittpunkt mit y-Achse: $a_0 = f(0) = 0 \rightarrow S_y(0 0)$
5. Extrem- und Terrassenpunkte / Monotonie <u>notwendig:</u> $f'(x_0) = 0$ <u>hinreichend:</u> VZW von f' (Vielfachheiten!) bzw. $f''(x_0) \neq 0$ ungerade, VZW von $-$ nach $+$ bzw. $f''(x_0) > 0$: relatives Minimum ungerade, VZW von $+$ nach $-$ bzw. $f''(x_0) < 0$: relatives Maximum gerade, kein VZW: Terrassenstelle danach: y-Werte berechnen (x-Werte in f einsetzen) Monotonieintervalle bestimmen: G_f skizzieren (oder Vorzeichen-tabelle von $f'(x)$)	$x(8x^2 + 21x + 10) = 0$ liefert: $x_1 = 0$; $x_4 = -0,625$; $x_5 = -2$ (alle einfach \rightarrow Exp) 1) $f''(0) = 10 > 0$; $f(0) = 0 \rightarrow \text{TiP}_1(0 0) = N_1 = S_y$ 2) $f''(-0,625) = -6,875 < 0$; $f(-0,625) \approx 0,55 \rightarrow \text{HoP}(-0,625 0,55)$ 3) $f''(-2) = 22 > 0$; $f(-2) = -4 \rightarrow \text{TiP}_2(-2 -4)$ G_f ist smf in $]-\infty; -2]$ und in $[-0,625; 0]$, sms in $[-2; -0,625]$ und in $[0; \infty[$
6. Wendepunkte / Krümmung <u>notwendig:</u> $f''(x_0) = 0$ <u>hinreichend:</u> VZW von f'' (Vielfachheiten!) bzw. $f'''(x_0) \neq 0$ danach: y-Werte berechnen (x-Werte in f einsetzen) evtl. Steigungen berechnen (x-Werte in f' einsetzen) wenn $= 0$: Terrassenpunkt Krümmungsintervalle bestimmen: $G_{f''}$ skizzieren (oder Vorzeichen-tabelle von $f''(x)$)	$12x^2 + 21x + 5 = 0$ liefert: $x_6 \approx -0,3$; $x_7 \approx -1,5$; beide einfach \rightarrow WeP 1) ($f'''(-0,3) = 27,6 \neq 0$;) $f(-0,3) \approx 0,25 \rightarrow \text{WeP}_1(-0,3 0,25)$ 2) ($f'''(-1,5) = -30 \neq 0$;) $f(-1,5) \approx -2,1 \rightarrow \text{WeP}_2(-1,5 -2,1)$ (Steigungen: 1) $f'(-0,3) \approx -1,3$ 2) $f'(-1,5) \approx 5,3$) $G_{f''}$ ist rechtsgekrümmt in $[-1,5; -0,3]$, linksgekrümmt in $]-\infty; -1,5]$ und in $[-0,3; \infty[$
7. Graph Alle bisherigen Ergebnisse verwenden; evtl. Wertetabelle mit weiteren Punkten erstellen; evtl. Tangenten in Nullstellen, Extrempunkten, Wendepunkten einzeichnen; Maßstab vernünftig wählen!	siehe nächste Seite

