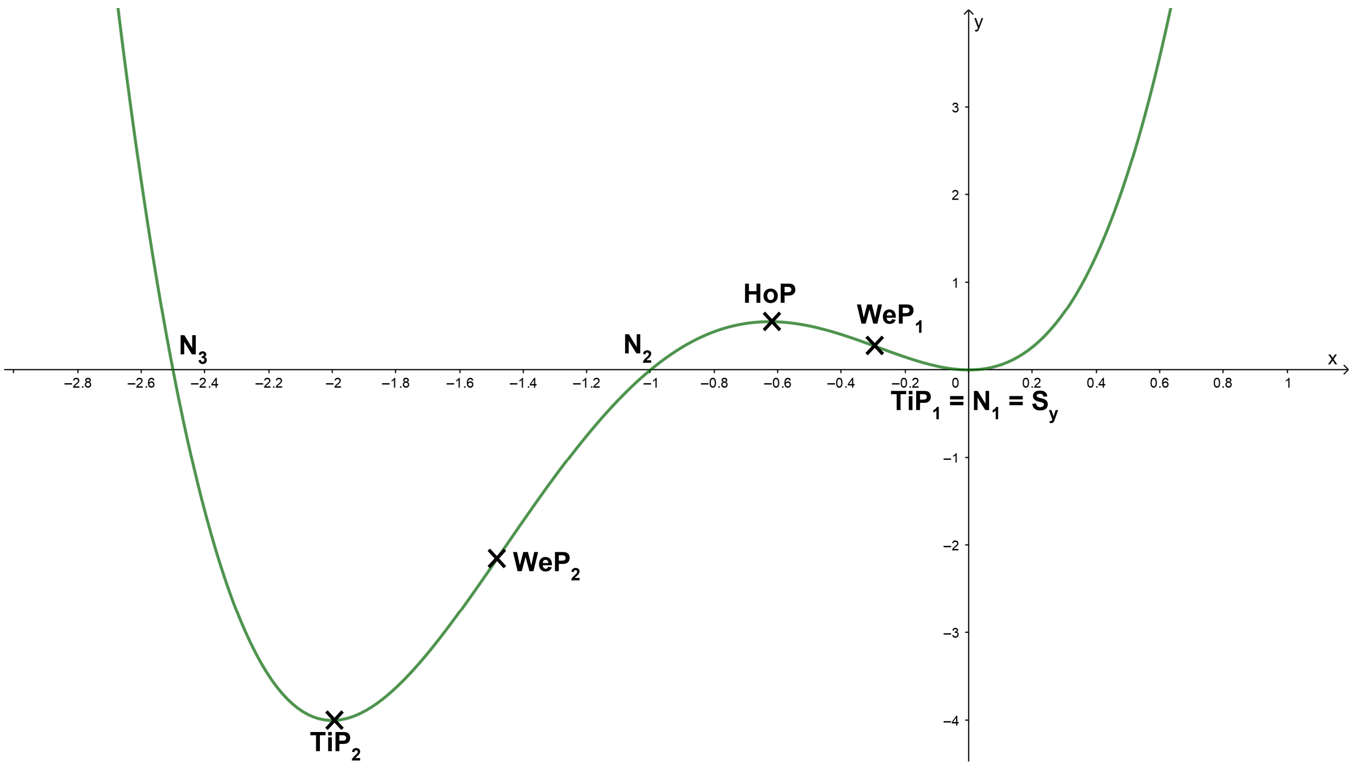
Kurvendiskussion

allgemein	Beispiel: $f(x) = 2\,x^4 + 7\,x^3 + 5\,x^2 = x^2\,(2\,x^2 + 7\,x + 5)$
1. Symmetrie nur gerade Exponenten im Funktionsterm: Graph symm. zur y-Achse; nur ungerade Exponenten: symm. zum Ursprung; sonst: keine Symm. zum KS	 Es kommen gerade und ungerade Exponenten vor, also liegt keine Symmetrie zum KS vor.
2. Verhalten für $x \to \pm\infty$ (und $x \to 0$) Das Verhalten ganz links/rechts wird bestimmt vom Summanden mit der höchsten Potenz (, das Verhalten nahe der y-Achse vom Summanden mit der kleinsten Potenz.)	Ganz links/rechts verhält sich der Graph wie der von $2\,x^4$, kommt also von links oben und geht nach rechts oben (, nahe der y-Achse verhält sich der Graph wie der von $5\,x^2$, berührt also den Ursprung von oben ➔ TiP).
3. Ableitungen Man braucht höchstens drei.	$f'(x) = 8\,x^3 + 21\,x^2 + 10\,x = x\,(8\,x^2 + 21\,x + 10)$ $f''(x) = 24\,x^2 + 42\,x + 10 = 2\,(12\,x^2 + 21\,x + 5)$ $(\ f'''(x) = 48\,x + 42\ )$
4. Gemeinsame Punkte mit den Achsen Gleichung $f(x) = 0$ lösen; evtl. Steigungen in den Nullstellen berechnen (Schnittpunkt mit y-Achse: a_0 ablesen bzw. $f(0)$ berechnen)	$x^2\,(2\,x^2 + 7\,x + 5) = 0$ liefert Nst.: $x_{1,2} = 0$ (doppelt, also ist dort ein ExP); $x_3 = -1$; $x_4 = -2{,}5$ (beide einfach), also Punkte: $N_1(0\|0)$; $N_2(-1\|0)$; $N_3(-2{,}5\|0)$ Steigungen dort: 1) $f'(0) = 0$ 2) $f'(-1) = 3$ 3) $f'(-2{,}5) = -18{,}75$ Schnittpunkt mit y-Achse: $a_0 = f(0) = 0$ ➔ $S_y(0\|0)$
5. Extremstellen / Monotonie <u>notwendig:</u> $f'(x_0) = 0$ <u>hinreichend:</u> VZW von f' (Vielfachheiten!) bzw. $f''(x_0) \neq 0$ ungerade, VZW von – nach + bzw. $f''(x_0) > 0$: relatives Minimum ungerade, VZW von + nach – bzw. $f''(x_0) < 0$: relatives Maximum gerade, kein VZW: Terrassenstelle danach: y-Werte berechnen (x-Werte in f einsetzen) Monotonieintervalle bestimmen: $G_{f'}$ skizzieren (oder Vorzeichentabelle von $f'(x)$)	$x\,(8\,x^2 + 21\,x + 10) = 0$ liefert: $x_1 = 0$; $x_4 = -0{,}625$; $x_5 = -2$ (alle einfach ➔ ExP) 1) $f''(0) = 10 > 0$; $f(0) = 0$ ➔ $TiP_1(0\|0) = N_1 = S_y$ 2) $f''(-0{,}625) = -6{,}875 < 0$; $f(-0{,}625) \approx 0{,}55$ ➔ $HoP(-0{,}625\|0{,}55)$ 3) $f''(-2) = 22 > 0$; $f(-2) = -4$ ➔ $TiP_2(-2\|-4)$ G_f ist smf in $]-\infty;-2]$ und in $[-0{,}625;0]$, sms in $[-2;-0{,}625]$ und in $[0;\infty[$
6. Wendestellen / Krümmung <u>notwendig:</u> $f''(x_0) = 0$ <u>hinreichend:</u> VZW von f'' (Vielfachheiten!) bzw. $f'''(x_0) \neq 0$ danach: y-Werte berechnen (x-Werte in f einsetzen) evtl. Steigungen berechnen (x-Werte in f' einsetzen) wenn = 0: Terrassenpunkt Krümmungsintervalle bestimmen: $G_{f''}$ skizzieren (oder Vorzeichentabelle von $f''(x)$)	$12\,x^2 + 21\,x + 5 = 0$ liefert: $x_6 \approx -0{,}3$; $x_7 \approx -1{,}5$; beide einfach ➔ WeP 1) ($f'''(-0{,}3) = 27{,}6 \neq 0$;) $f(-0{,}3) \approx 0{,}25$ ➔ $WeP_1(-0{,}3\|0{,}25)$ 2) ($f'''(-1{,}5) = -30 \neq 0$;) $f(-1{,}5) \approx -2{,}1$ ➔ $WeP_2(-1{,}5\|-2{,}1)$ (Steigungen: 1) $f'(-0{,}3) \approx -1{,}3$ 2) $f'(-1{,}5) \approx 5{,}3$) G_f ist rechtsgekrümmt in $[-1{,}5;-0{,}3]$, linksgekrümmt in $]-\infty;-1{,}5]$ und in $[-0{,}3;\infty[$
7. Graph Alle bisherigen Ergebnisse verwenden; evtl. Wertetabelle mit weiteren Punkten erstellen; evtl. Tangenten in Nullstellen, Extrempunkten, Wendepunkten einzeichnen; Maßstab vernünftig wählen!	siehe nächste Seite



y
x
3
2
1
−1
−2
−3
−4
−2.8
−2.6
−2.4
−2.2
−2
−1.8
−1.6
−1.4
−1.2
−1
−0.8
−0.6
−0.4
−0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
HoP
WeP1
N3
N2
TiP1 = N1 = Sy
WeP2
TiP2