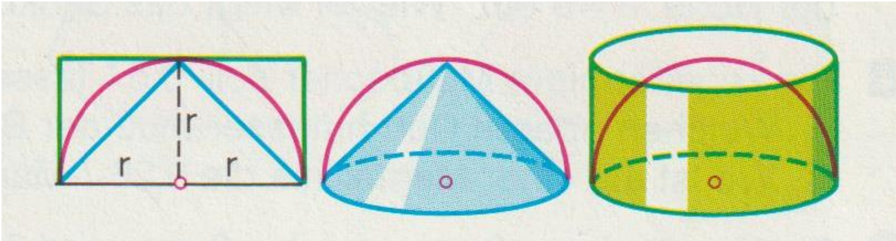
Kugeln

Das Volumen einer Halbkugel ist offensichtlich größer als das Volumen eines Kegels mit demselben Radius r, bei dem auch die Höhe gleich r ist, aber kleiner als das Volumen eines Zylinders mit demselben Radius r, bei dem auch die Höhe gleich r ist:



Es gilt also:

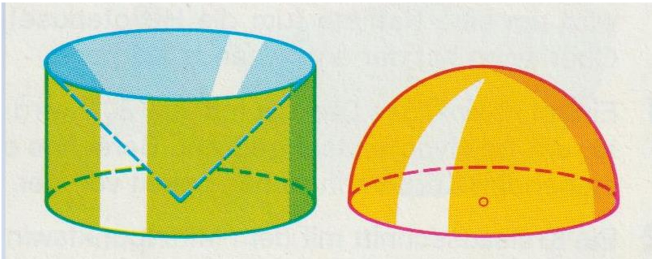
$$< V_{\text{Halbkugel}} <$$

Eine naheliegende Vermutung wäre somit:

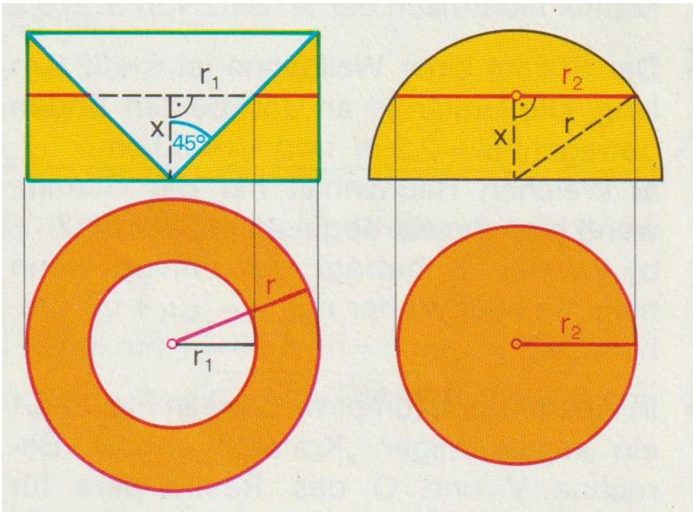
$$V_{\text{Halbkugel}} =$$

Dass das wirklich so stimmt, kann man auch streng beweisen. Dafür vergleicht man den Körper, der entsteht, wenn man aus dem Zylinder einen Kegel „ausschneidet“, mit der Halbkugel. Dieser Körper hat das Volumen

$$V = V_{\text{Zylinder}} - V_{\text{Kegel}} =$$



Beide Körper stellen wir uns nun von einer Ebene parallel zur Grundfläche geschnitten vor, jeweils in der Höhe x:



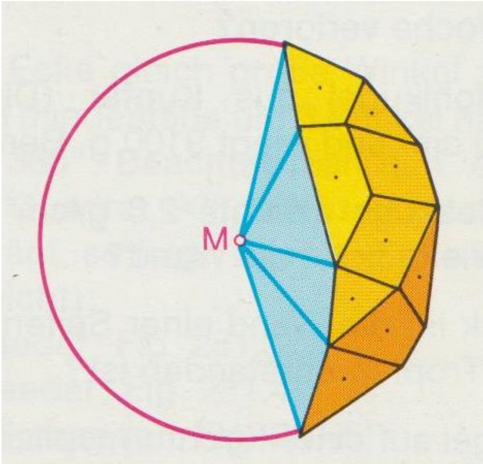
Es entstehen Schnittflächen mit den Flächeninhalten

$A_{\text{Kreisring}} =$ bzw. $A_{\text{Kreis}} =$

In jeweils derselben Höhe sind also die Flächeninhalte der Schnittflächen jeweils gleich groß. Mit dem Satz von Cavalieri folgt, dass beide Körper also wirklich dasselbe Volumen haben. Damit folgt für das Volumen einer ganzen Kugel:

$$\boxed{V = \quad}$$

Kugeln kann man beliebig genau durch Polyeder (Vielflächner) annähern:



Das Volumen eines solchen Vielflächners ergibt sich als Summe der Volumina von Pyramiden, und deren Höhen sind jeweils gleich dem Kugelradius r, also:

$$V = \frac{1}{3}G_1 r + \frac{1}{3}G_2 r + \cdots = \frac{1}{3}(G_1 + G_2 + \cdots)r$$

Wenn die Anzahl der Pyramiden immer größer wird, dann nähert sich die Summe ihrer Grundflächen aber immer mehr an die Kugeloberfläche O an; es gilt also:

$$V = \frac{1}{3}Or.$$

Setzen wir darin die Formel für das Kugelvolumen von oben ein, erhalten wir eine Formel für die Kugeloberfläche:

$$= \frac{1}{3}Or$$

==>

$$\boxed{O = \quad}$$