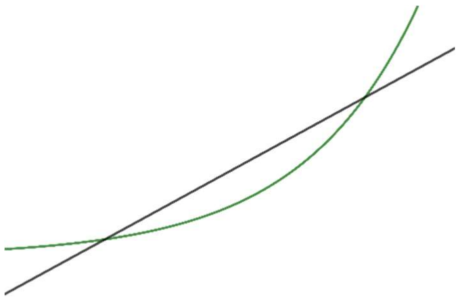
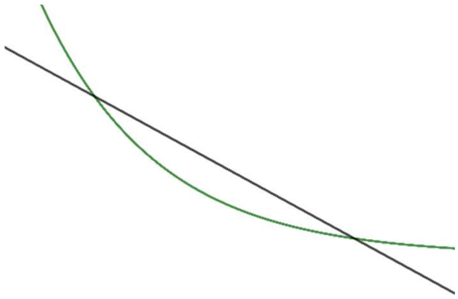
Krümmungsintervalle und Flachpunkte

a) Krümmungsintervalle

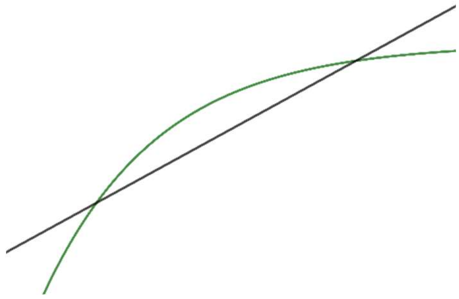
linksgekrümmte Graphen:



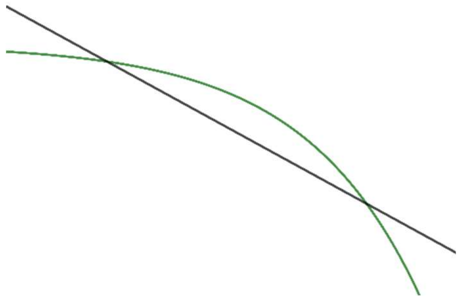
Steigung nimmt



rechtsgekrümmte Graphen:



Steigung nimmt



Definition: Liegen in einem Intervall [a;b] alle Sekanten des Graphen einer Funktion $\left\{ \quad \right\}$ dem Graph, so heißt die Funktion $\begin{Bmatrix}\text{konvex}\\ \text{konkav}\end{Bmatrix}$; ihr Graph heißt dann $\begin{Bmatrix}\underline{\text{linksgekrümmt}} & \text{(LK)}\\ \underline{\text{rechtsgekrümmt}} & \text{(RK)}\end{Bmatrix}$.

Anmerkung: Rechnerisch überprüft man das so: Für alle $x_1, x_2 \in [a;b]$ *mit* $x_2 > x_1$ *muss jeweils für alle* $x \in]x_1;x_2[$ *gelten:* $\begin{Bmatrix}\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)+f(x_1) > f(x)\\ \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)+f(x_1) < f(x)\end{Bmatrix}$.

Wir brauchen also die (momentane) Änderung(srate) der Steigung, also die der .

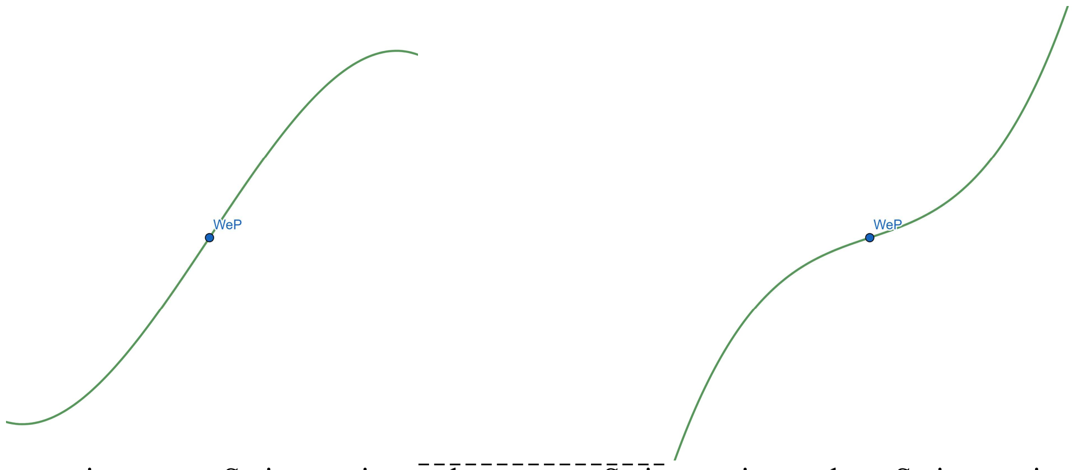
Bildet man von einer Ableitungsfunktion f '(x) bzw. $\dot{x}(t)$ nochmals die , so erhält man die f ''(x) bzw. $\ddot{x}(t)$. Diese beschreibt die Krümmung von G_f.

Genauer gilt:

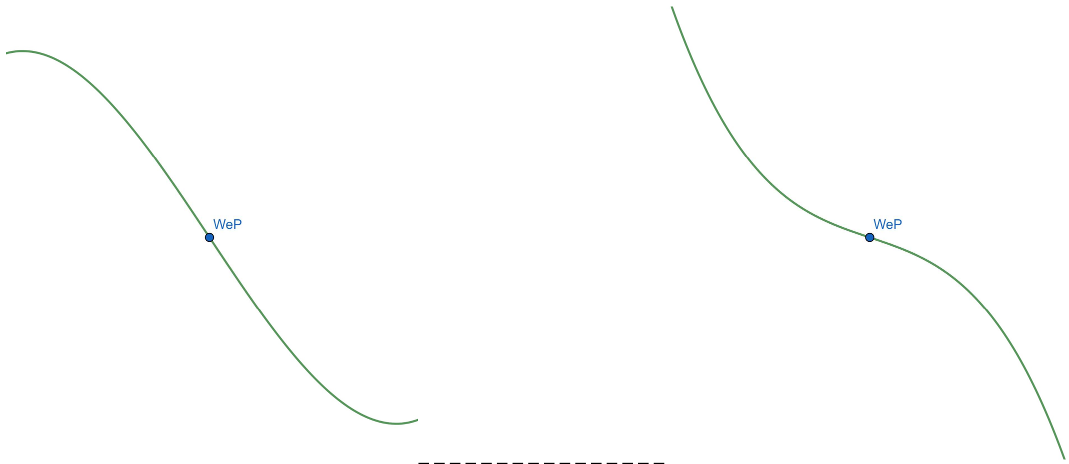
Satz: Ist f in [a;b] stetig und in]a;b[zweimal differenzierbar, so gilt

$\begin{Bmatrix}f''(x) \quad \\ f''(x) \quad \end{Bmatrix}$ in]a;b[➔ G_f ist $\begin{Bmatrix}\text{linksgekrümmt (konvex)}\\ \text{rechtsgekrümmt (konkav)}\end{Bmatrix}$ in [a;b]

b) Flachpunkte – also Wendepunkte – oder eben auch nicht…



Steigung nimmt zu   Steigung nimmt ab   Steigung nimmt ab   Steigung nimmt zu



Gefälle nimmt zu   Gefälle nimmt ab   Gefälle nimmt ab   Gefälle nimmt zu

Definitionen: Eine Stelle x_0, an der $f''(x_0) = 0$ gilt, heißt Flachstelle, der entsprechende Punkt heißt Flachpunkt FlaP. Eine (eigentliche) relative Extremstelle von f', also eine Stelle mit Steigung oder Gefälle, heißt Wendestelle, der entsprechende Punkt heißt Wendepunkt, die Tangente im Wendepunkt heißt Wendetangente. Ein Wendepunkt ist also ein Punkt, bei dem G_f von einer Links- zu einer Rechtskurve wechselt oder umgedreht.

Satz 1: Ist $f''(x_0) = 0$, so ist bei x_0 ein WeP von G_f.

Satz 2: Ist x_0 eine Nullstelle von f'' mit $\left\{ \qquad \right\}$ Vielfachheit, so ist bei x_0 $\left\{ \begin{matrix} \text{ein} \\ \text{kein} \end{matrix} \right\}$ WeP von G_f.