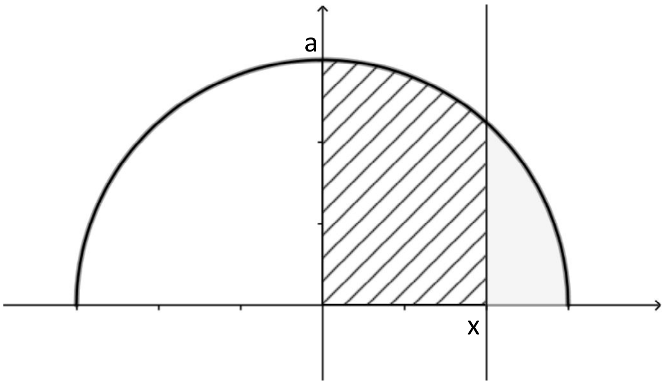
Berechnung des „Kreisintegrals" mittels elementarer Geometrie, ohne Integralrechnung

Gesucht ist der orientierte Inhalt der Fläche unter einem Halbkreis mit Radius a um den Ursprung in der oberen Halbebene zwischen der y-Achse und einer senkrechten Gerade bei einem Wert x.

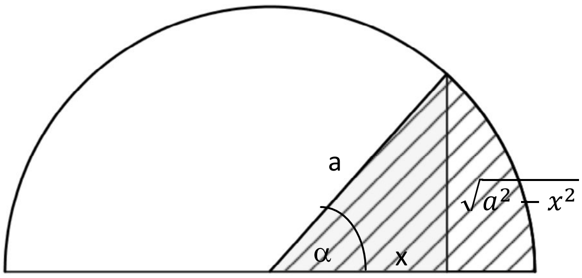
Betrachten wir zunächst $x > 0$:



Gesucht ist also der schraffierte Flächeninhalt. Dieser ist offensichtlich gleich dem Flächeninhalt des Viertelkreises minus dem Inhalt des halben Kreissegments (grau).

$$\mathrm{A} = \tfrac{1}{4}\pi\, a^2 - \tfrac{1}{2}\mathrm{A}_{\mathrm{Kreissegment}}$$

Den Flächeninhalt des halben Kreissegments erhält man wiederum als Differenz aus dem Flächeninhalt eines Kreissektors (schraffiert) und eines rechtwinkligen Dreiecks (grau):



Der Winkel α des Kreissektors ist (im Bogenmaß) gegeben durch α = arccos(x/a), die Höhe des Dreiecks ergibt sich mit dem Satz von Pythagoras zu $h = \sqrt{a^2 - x^2}$. Damit ist

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\mathrm{A}_{\mathrm{Kreissegment}} = \mathrm{A}_{\mathrm{Kreissektor}} - \mathrm{A}_{\mathrm{Dreieck}} &= \tfrac{1}{2}\,\alpha\, a^2 - \tfrac{1}{2}\,x\,h \\ &= \tfrac{1}{2}\,a^2 \arccos(x/a) - \tfrac{1}{2}\,x\sqrt{a^2-x^2},\end{aligned}$$

und der gesuchte Flächeninhalt ist schließlich

$$\mathrm{A} = \tfrac{1}{4}\pi\, a^2 - \tfrac{1}{2}a^2 \arcsin(x/a) + \tfrac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} = \frac{1}{2}a^2 \arcsin(x/a) + \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2}$$

Da das Integral der *orientierte* Flächeninhalt ist, muss sich für $x < 0$ bei gleichem betragsmäßigen Flächeninhalt jeweils genau das negative hiervon ergeben. Unser Ergebnis ist aber eine ungerade Funktion, liefert also für $x < 0$ automatisch jeweils genau das negative. Damit stimmt das Ergebnis auch für $x < 0$. (Und für $x = 0$ sowieso, weil sich dann $A = 0$ ergibt.)

Es folgt: $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$, was zu zeigen war.