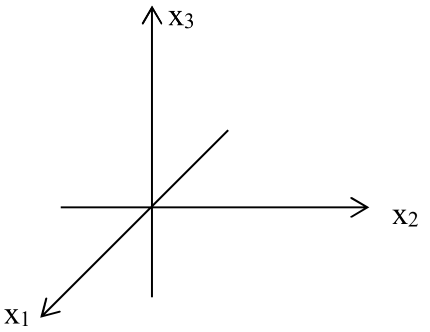
Koordinatendarstellung von Vektoren

Ist ein Koordinatensystem festgelegt, so kann man die Lage jedes Punktes eindeutig durch seine Koordinaten angeben. In der (Zeichen-)Ebene (Heft bzw. Tafel) benötigt man zwei Koordinaten (x, y oder x_1, x_2), im Raum drei (x, y, z oder x_1, x_2, x_3). Die Koordinaten eines Punktes im Raum werden folgendermaßen angegeben: $P(x_1|x_2|x_3)$ oder $P(x_1; x_2; x_3)$. Ein „kartesisches“ (nach dem französischen Philosophen und Mathematiker René Descartes, 1596-1650) räumliches Koordinatensystem wird auf dem Papier meist folgendermaßen gezeichnet:



Dabei schließt die x_1-Achse mit den beiden anderen Achsen jeweils einen Winkel von 45° ein, und sie ist im Vergleich zu den anderen Achsen um einen Faktor $\frac{\sqrt{2}}{2}$ verkürzt. (Dies erleichtert das Zeichnen: eine Kästchendiagonale ist genau eine Längeneinheit.) Man sieht, dass es drei Koordinatenebenen gibt: die x_1-x_2-Ebene („Fußboden“), die x_2-x_3-Ebene („Tafelwand“) und die x_1-x_3-Ebene („Fensterwand“). ***Beachte:*** Beim Einzeichnen landen jeweils unendlich viele verschiedene Punkte an derselben Stelle auf dem Papier! Zum Ablesen von Punktkoordinaten braucht man deshalb immer zusätzliche Informationen!

Komponenten von Vektoren:

Mit Hilfe eines solchen Koordinatensystems kann man nun auch bei jeder Verschiebung angeben, wie weit diese jeweils in welche Richtung geht; diese Angaben heißen die Komponenten (oder Koordinaten) des Verschiebungsvektors. Man schreibt: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

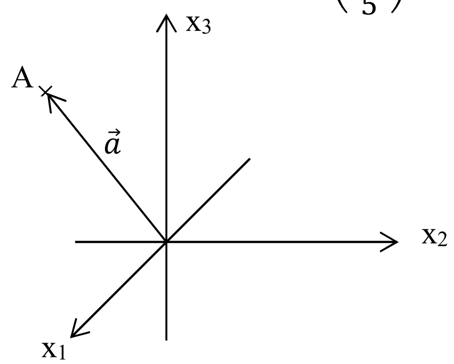
Zwei Vektoren sind genau dann gleich, wenn sie dieselben Komponenten haben

Die Menge aller Vektoren mit zwei Komponenten bildet den Vektorraum $\mathbb{R}^2$, die Menge aller Vektoren mit drei Komponenten den Vektorraum $\mathbb{R}^3$. (Anmerkung: Diese Bezeichnungen werden allerdings auch manchmal für die Menge aller Punkte der Ebene bzw. des Raumes benutzt!)

Ortsvektoren:

Für jeden Punkt P heißt der Vektor $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ vom Ursprung O zu P der Ortsvektor von P.
Beachte: Die Komponenten eines Ortsvektors stimmen immer mit den Koordinaten des zugehörigen Punkts überein; aber beide sind verschiedene Objekte und werden auch unterschiedlich geschrieben!

Beispiel: Der Punkt A(3; –2; 5) hat den Ortsvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$; zeichnerische Darstellung:



Komponenten eines Vektors $\overrightarrow{AB}$:

Die Komponenten des Vektors $\overrightarrow{AB}$ geben an, wie man den Punkt A verschieben muss, um zum Punkt B zu gelangen. Also gilt:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix} \qquad \text{(}\textbf{\textit{Merkregel:}}\ \textit{„Spitze minus Fuß“!}\text{)}$$

Alternativ: Zunächst verschiebt man den Punkt A zum Punkt O (Vektor $\overrightarrow{AO}$), dann den Punkt O zum Punkt B (Vektor $\overrightarrow{OB}$). Also insgesamt: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{b} - \vec{a}$.

Beispiel: Für A(2; 3; –1) und B (–2; 5; 4) ergibt sich $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Addition:

Führt man z. B. eine Verschiebung um 2 in x-Richtung und um –3 in y-Richtung durch und anschließend eine Verschiebung um -1 in x-Richtung und um 5 in y-Richtung, so hat man die Punkte insgesamt um 1 in x-Richtung und um 2 in y-Richtung verschoben. In Vektorschreibweise:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+(-1) \\ -3+5 \end{pmatrix} \quad \text{(manchmal auch } \oplus \text{ statt +)}$$

Es gilt also allgemein: $\boxed{\text{Vektoren werden komponentenweise addiert.}}$

S-Multiplikation:

Vergleicht man eine Verschiebung um -2 in x-Richtung und um 4 in y-Richtung mit einer Verschiebung um 3 in x-Richtung und um –6 in y-Richtung, so sieht man, dass die zweite Verschiebung entgegengesetzt zur ersten verläuft und 1,5mal so weit geht. In Vektorschreibweise:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix} = -1{,}5 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}5 \cdot (-2) \\ -1{,}5 \cdot 4 \end{pmatrix} \quad \text{(manchmal auch } \odot \text{ statt } \cdot \text{)}$$

Es gilt also allgemein: $\boxed{\text{Vektoren werden komponentenweise mit einer Zahl multipliziert.}}$

Parallelität:

Beachte: Bei einer solchen Multiplikation ergibt sich immer ein Vektor, der dieselbe oder die entgegengesetzte Richtung wie der ursprüngliche Vektor hat; Vektoren, die in unterschiedliche Richtungen zeigen, können keine Vielfachen voneinander sein! Es gilt also:

Zwei Vektoren sind parallel, wenn man einen als Vielfaches des anderen darstellen kann, d. h. es gibt eine Zahl λ, sodass gilt: $\vec{a} = \lambda\,\vec{b}$, also $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda b_1 \\ \lambda b_2 \\ \lambda b_3 \end{pmatrix}$, d. h., $a_1 = \lambda b_1$, $a_2 = \lambda b_2$ und $a_3 = \lambda b_3$ müssen gleichzeitig gelten. Parallele Vektoren nennt man auch kollinear (*sie haben Repräsentanten, die auf derselben Gerade („line“) liegen)*.

Länge von Vektoren:

1) Für die Länge (Betrag) eines Vektors schreibt man Betragsstriche um sein Symbol, z. b. $|\vec{a}|$ oder einfach das Symbol ohne Pfeil, z. B. a.

Berechnung: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ (dies folgt aus dem Satz von Pythagoras)

2) Ein Vektor der Länge 1 heißt Einheitsvektor; oft geschrieben als $\vec{a}^0$ oder $\vec{a}_0$

Abstand zweier Punkte A und B:

Dieser ist gleich der Länge der Strecke $\overline{AB}$, also gleich dem Betrag des Vektors $\overrightarrow{AB}$. Damit ergibt sich:

$$d(A;B) = |\overline{AB}| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$