Wichtige Formeln der Kombinatorik

b) Permutationen und Fakultäten

Beispiel 1: Wie viele Möglichkeiten für die Sitzordnung gibt es in einer Klasse mit 25 Schülern in einem Klassenzimmer mit 25 Sitzplätzen? Für den ersten Schüler gibt es Möglichleiten, für den zweiten Möglichkeiten, ..., für den 25. Schüler Möglichkeit, also insgesamt: ≈ Möglichkeiten.

Definition: wird mit n! abgekürzt (sprich: „n Fakultät"); außerdem definiert man 0! = 1.

Beispiele: 25! ≈ ; 4! =

Mit dem Taschenrechner kann man Fakultäten einfach ausrechnen (Taste n! oder x!); außerdem findet sich im Tafelwerk (S. 4) eine Liste.

Satz: Die Anzahl der Möglichkeiten, n verschiedene Dinge in unterschiedlicher Reihenfolge anzuordnen, ist durch n! gegeben.

Beachte: Im Urnenmodell entspricht dies dem Ziehen von n verschiedenen Kugeln von n, ohne Zurücklegen, mit Beachtung der Reihenfolge.

Beispiel 2: Drei rote und zwei weiße Rosen sollen nebeneinander angeordnet werden. Wie viele verschiedene Farbanordnungen gibt es?
Es werden insgesamt fünf Rosen angeordnet ==> Möglichleiten
Diese Möglichkeiten sind allerdings nicht alle unterscheidbar; beispielsweise gehören zum Ergebnis rwrwr die Möglichkeiten
==> insgesamt gibt es nur unterscheidbare Möglichkeiten.

Satz: Die Anzahl der Möglichkeiten, n Dinge in unterschiedlicher Reihenfolge anzuordnen, wobei jeweils m_1, m_2, ... Dinge ununterscheidbar sind, ist gegeben durch *(„Multinomialkoeffizient")* Dabei ist $m_1 + m_2 + ... =$

c) Variationen

Beispiel 1: Ein Würfel wird dreimal geworfen. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es für die geworfenen Zahlen? Beim ersten Wurf gibt es Möglichkeiten, beim zweiten Möglichkeiten, beim dritten Möglichkeiten, insgesamt also Möglichkeiten.

Satz: Die Anzahl der Möglichkeiten, k Dinge aus n auszuwählen, wobei dasselbe Ergebnis auch mehrfach vorkommen kann, mit Beachtung der Reihenfolge, ist durch gegeben.

Beachte: Im Urnenmodell entspricht dies dem Ziehen von k Kugeln von n, mit Zurücklegen, mit Beachtung der Reihenfolge.

Beispiel 2: Wie viele Möglichkeiten für die Sitzordnung gibt es in einer Klasse mit 25 Schülern in einem Klassenzimmer mit 32 Sitzplätzen? Für den ersten Schüler gibt es Möglichkeiten, für den zweiten Möglichkeiten, ..., für den 25. Schüler Möglichkeiten, also insgesamt: Möglichkeiten.

Dies kann man nicht als Fakultät schreiben, da die letzte Ziffer ja keine 1 ist. Mit einem Trick kann man das Produkt aber so umschreiben, dass man das Produkt mittels eines Quotienten von *zwei* Fakultäten schreiben kann; man ergänzt (erweitert) das Produkt einfach zu einem Bruch (man multipliziert erst mal mit den Zahlen, die fehlen, und teilt dann gleich wieder dadurch):

$$= \frac{\qquad}{\qquad} = \frac{\;!}{\;!} = \frac{\;!}{(\;-\;)!}$$

Satz: Die Anzahl der Möglichkeiten, k verschiedene Dinge aus n auszuwählen, mit Beachtung der Reihenfolge, ist $\frac{\quad !}{(\quad - \quad)!}$. *(auch „k-Permutationen" genannt; TR: nPr)*

Beachte: Im Urnenmodell entspricht dies dem Ziehen von k Kugeln von n, ohne Zurücklegen, mit Beachtung der Reihenfolge.

d) Kombinationen und Binomialkoeffizienten

Beispiel: 3 Personen verteilen sich auf 5 Stühle; die genaue Sitzordnung interessiert aber nicht, sondern nur, welche Stühle besetzt sind (die Reihenfolge ist also unwichtig). Wie viele Möglichkeiten gibt es?
Der Ergebnisraum ist hier $\Omega = \{ \qquad\qquad\qquad \}$

Berücksichtigt man zunächst die Reihenfolge, so gibt es $\frac{\quad !}{(\quad - \quad)!}$ Möglichkeiten. Andererseits gibt es aber   Möglichkeiten, die 3 Personen auf die 3 besetzten Stühle zu verteilen (zum Beispiel gehören zum Ergebnis 123 die   Möglichkeiten   ). Ignoriert man die Reihenfolge, so bleiben also $\frac{\quad !}{(\quad - \quad)!} : \quad ! = \frac{\quad !}{(\quad - \quad)! \cdot \quad !}$ Möglichkeiten; dafür schreibt man kurz $\binom{5}{3}$.

Definition: Der Term $\frac{\quad !}{(\quad - \quad)! \cdot \quad !}$ wird mit $\binom{n}{k}$ abgekürzt (sprich: „n über k“ oder „k aus n“) und heißt Binomialkoeffizient.

Mit dem Taschenrechner kann man Binomialkoeffizienten leicht berechnen (Taste nCr); außerdem findet sich im Tafelwerk (S. 6) eine Liste.

Satz: Die Anzahl der Möglichkeiten, k verschiedene Dinge aus n auszuwählen, ohne Beachtung der Reihenfolge, ist $\binom{n}{k}$.

Beahte: Im Urnenmodell entspricht dies dem Ziehen von k Kugeln von n, ohne Zurücklegen, ohne Beachtung der Reihenfolge. (Beispiel: Lotto!)

Grund für Bezeichnung „Binomialkoeffizient“:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 1\ a^2b^0 + 2\ a^1b^1 + 1\ a^0b^2$
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 1\ a^3b^0 + 3\ a^2b^1 + 3\ a^1b^2 + 1\ a^0b^3$ *(siehe Formelsammlung)*
$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 = 1\ a^4b^0 + 4\ a^3b^1 + 6\ a^2b^2 + 4\ a^1b^3 + 1\ a^0b^4$ *(nachrechnen!)*

vergleiche die Vorfakten mit den ersten Binomialkoeffizienten (siehe Tabelle im Tafelwerk) ➔

$$(a+b)^2 = \binom{2}{0}a^{2-0}b^0 + \binom{2}{1}a^{2-1}b^1 + \binom{2}{2}a^{2-2}b^2$$

$$(a+b)^3 = \binom{3}{0}a^{3-0}b^0 + \binom{3}{1}a^{3-1}b^1 + \binom{3}{2}a^{3-2}b^2 + \binom{3}{3}a^{3-3}b^3$$

$$(a+b)^4 = \binom{4}{0}a^{4-0}b^0 + \binom{4}{1}a^{4-1}b^1 + \binom{4}{2}a^{4-2}b^2 + \binom{4}{3}a^{4-3}b^3 + \binom{4}{4}a^{4-4}b^4$$

allgemein gilt also:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^{n-0}b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \ldots + \binom{n}{n}a^{n-n}b^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i \qquad \text{(„Binomischer Lehrsatz“)}$$