Grundlagen der Kombinatorik

a) Permutationen
Beispiel: Wie viele Möglichkeiten für die Sitzordnung gibt es in einer Klasse mit 25 Schülern in einem Klassenzimmer mit 25 Sitzplätzen? Für den ersten Schüler gibt es   Möglichleiten, für den zweiten   Möglichkeiten, ..., für den 25. Schüler   Möglichkeit, also insgesamt: =   Möglichkeiten.

Definition: wird mit n! abgekürzt (sprich: „n Fakultät“); außerdem definiert man 0! = 1.

Beispiele: 25! =   ; 4! =

Mit dem Taschenrechner kann man Fakultäten einfach ausrechnen (Taste n! oder x!); außerdem findet sich im Tafelwerk (S. 4) eine Liste.

Satz: Die Anzahl der Mögl., n verschiedene Dinge in unterschiedlicher Reihenfolge anzuordnen, ist n!.

Anmerkung: Im Urnenmodell entspricht dies dem Ziehen von n Kugeln von n, ohne Zurücklegen, mit Beachtung der Reihenfolge.

b) k-Permutationen
Beispiel: Wie viele Möglichkeiten für die Sitzordnung gibt es in einer Klasse mit 25 Schülern in einem Klassenzimmer mit 32 Sitzplätzen? Für den ersten Schüler gibt es   Möglichkeiten, für den zweiten   Möglichkeiten, ..., für den 25. Schüler   Möglichkeiten, also insgesamt: Möglichkeiten.

Dies kann man nicht als Fakultät schreiben, da die letzte Ziffer ja keine 1 ist. Mit einem Trick kann man das Produkt aber so umschreiben, dass man das Produkt mittels eines Quotienten von *zwei* Fakultäten schreiben kann; man ergänzt (erweitert) das Produkt einfach zu einem Bruch (man multipliziert erst mal mit den Zahlen, die fehlen, und teilt dann gleich wieder dadurch):

$$= \frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad} = \frac{\;!}{\;!} = \frac{\;!}{(\; - \;)!}$$

Satz: Die Anzahl der Möglichkeiten, k verschiedene Dinge aus n auszuwählen (mit Beachtung der Reihenfolge), ist $\frac{\;!}{(\; - \;)!}$.

Anmerkung: Im Urnenmodell entspricht dies dem Ziehen von k Kugeln von n, ohne Zurücklegen, mit Beachtung der Reihenfolge.

Anwendung: Das „Geburtstags-Problem“:
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Gruppe von k Personen mindestens 2 Personen am selben Tag Geburtstag haben? Diese Wahrscheinlichkeit ist direkt praktisch nicht auszurechnen; wir verwenden mal wieder das Gegenereignis. Gesucht ist also zunächst die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer Gruppe von k Personen alle an verschiedenen Tagen Geburtstag haben.

Zunächst gibt es in einer Gruppe von k Personen allgemein   =   Möglichkeiten für die Geburtstage. Die Anzahl der Möglichkeiten, dass alle an verschiedenen Tagen Geburtstag haben, ist dagegen

=

Wir setzen voraus, dass jeder Geburtstag gleich wahrscheinlich ist; dann handelt es sich um ein -Experiment, und die Wahrscheinlichkeit, dass alle an verschiedenen Tagen Geburtstag haben, ist einfach

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 2 am selben Tag Geburtstag haben, ist also schließlich

P =

Beispiel: Schon für k = 23 ergibt sich eine Wahrscheinlichkeit von 50,73%!

c) Binomialkoeffizienten

Beispiel: 3 Personen verteilen sich auf 5 Stühle; die genaue Sitzordnung interessiert aber nicht, sondern nur, welche Stühle besetzt sind (die Reihenfolge ist also unwichtig). Wie viele Möglichkeiten gibt es?
Der Ergebnisraum ist hier Ω = {   }

Berücksichtigt man zunächst die Reihenfolge, so gibt es $\frac{\quad !}{(\quad - \quad)!}$ Möglichkeiten. Andererseits gibt es aber   Möglichkeiten, die 3 Personen auf die 3 besetzten Stühle zu verteilen (zum Beispiel gehören zum Ergebnis 123 die   Möglichkeiten   ). Ignoriert man die Reihenfolge, so bleiben also $\frac{\quad !}{(\quad - \quad)!} : \quad ! = \frac{\quad !}{(\quad - \quad)! \cdot \quad !}$ Möglichkeiten; dafür schreibt man kurz $\binom{5}{3}$.

> Definition: Der Term $\frac{\quad !}{(\quad - \quad)! \cdot \quad !}$ wird mit $\binom{n}{k}$ abgekürzt (sprich: „n über k“ oder „k aus n“) und heißt Binomialkoeffizient.

Mit dem Taschenrechner kann man Binomialkoeffizienten leicht berechnen (Taste nCr); außerdem findet sich im Tafelwerk (S. 6) eine Liste.

Spezialfälle: $\binom{n}{0} = 1$; $\binom{n}{1}$ = n; $\binom{n}{n-1}$ = n; $\binom{n}{n}$ = 1;   außerdem gilt immer: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

> Satz: Die Anzahl der Möglichkeiten, k verschiedene Dinge aus n auszuwählen (ohne Beachtung der Reihenfolge), ist $\binom{n}{k}$.

Anmerkung: Im Urnenmodell entspricht dies dem Ziehen von k Kugeln von n, ohne Zurücklegen, ohne Beachtung der Reihenfolge (Beispiel: Lotto!).

Grund für Bezeichnung „Binomialkoeffizient“:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 1\,a^2b^0 + 2\,a^1b^1 + 1\,a^0b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 1\,a^3b^0 + 3\,a^2b^1 + 3\,a^1b^2 + 1\,a^0b^3$ *(siehe Formelsammlung)*

$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 = 1\,a^4b^0 + 4\,a^3b^1 + 6\,a^2b^2 + 4\,a^1b^3 + 1\,a^0b^4$ *(nachrechnen!)*

vergleiche die Vorfakten mit den ersten Binomialkoeffizienten (siehe Tabelle im Tafelwerk) ➔

$$(a+b)^2 = \binom{2}{0}a^{2-0}b^0 + \binom{2}{1}a^{2-1}b^1 + \binom{2}{2}a^{2-2}b^2$$

$$(a+b)^3 = \binom{3}{0}a^{3-0}b^0 + \binom{3}{1}a^{3-1}b^1 + \binom{3}{2}a^{3-2}b^2 + \binom{3}{3}a^{3-3}b^3$$

$$(a+b)^4 = \binom{4}{0}a^{4-0}b^0 + \binom{4}{1}a^{4-1}b^1 + \binom{4}{2}a^{4-2}b^2 + \binom{4}{3}a^{4-3}b^3 + \binom{4}{4}a^{4-4}b^4$$

allgemein gilt also:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^{n-0}b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \ldots + \binom{n}{n}a^{n-n}b^n$$ („Binomischer Lehrsatz“)