Integrieren von Quotientenfunktionen

1) gebrochenrationale Funktion, in deren Nenner nur eine Potenzfunktion steht?
   - Bruch in Summe von Brüchen aufteilen
   - dann für jeden einzelnen Bruch die folgenden Formeln benutzen: (*konstante Faktoren bleiben stehen!*)

     $\int \frac{1}{x^n}\,dx = \int x^{-n}\,dx = \frac{x^{-n+1}}{-n+1} + C = \frac{1}{-n+1}\frac{1}{x^{n-1}} + C$ für $n \neq 1$ *(siehe Formelsammlung!)*

     $\int \frac{1}{x}\,dx$ = ln|x| + C *(siehe Formelsammlung!)*

z. B.: $\int \frac{5x^4 - 2x^2 + 5}{3x^3}\,dx = \int \left(\frac{5}{3}x - \frac{2}{3}\frac{1}{x} + \frac{5}{3}\frac{1}{x^3} \right) dx = \frac{5}{6}x^2 - \frac{2}{3}\ln|x| - \frac{5}{6x^2} + C$

2) gebrochenrationale Funktion mit Zählergrad $\geq$ Nennergrad?
   - Polynomdivision
   - ganzrationalen Teil wie üblich integrieren
   - ist der Zähler des echt gebrochenrationalen Teils nur eine Konstante?
     - wenn ja, folgende Formeln benutzen: *(vergleiche (1) oben! dazu: Faktor $\frac{1}{a}$ wegen innerer Ableitung! konstante Faktoren bleiben stehen!)*

       $\int \frac{1}{(ax+b)^n}\,dx = \frac{1}{-n+1}\frac{1}{a}\frac{1}{(ax+b)^{n-1}}$ + C für $n \neq 1$

       $\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}$ ln |ax + b| + C

z. B.: $\int \frac{4x^2 + 2}{2x-1}\,dx = ... = \int \left(2x + 1 + \frac{3}{2x-1} \right) dx = x^2 + x + \frac{3}{2} \ln|2x-1| + C$

     - wenn nein: siehe (3)

3) steht im Zähler der Funktion (*kann gebrochenrational sein, muss aber nicht!*) die Ableitung des Nenners? (bzw. ein Vielfaches davon)
   - wenn ja, folgende Formel benutzen: $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$ = ln|f(x)| + C

z. B.: 1) $\int \frac{2x^2}{x^3+1}\,dx = \frac{2}{3}\int \frac{3x^2}{x^3+1}\,dx = \frac{2}{3}\ln|x^3+1| + C$

2) $\int \frac{(x+1)^2}{x^2+1}\,dx = ... = \int \left(1 + \frac{2x}{x^2+1} \right) dx = x + \ln|x^2+1| + C$

3) $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx = \ln|e^x + e^{-x}| + C$

   - wenn nein: mit Stoff aus Klasse 12 nicht lösbar...