Bisher kennen wir folgenden Integrationsregeln:
1) $\int \left(f(x) + g(x) \right) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$
2) $\int \left(c \cdot f(x) \right) dx = c \cdot \int f(x) dx$ für alle $c \in \mathbb{R}$
3a) $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} (+C)$ bzw. 3b) $\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{n+1} (ax+b)^{n+1} \cdot \frac{1}{a} (+C)$ ($a,b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$)
(Zusatzfrage: wie erhält man aus (3b) wieder die spezielle Regel (3a)?)

Entscheiden Sie bei den folgenden Integralen jeweils, ob sie mit diesen Regeln direkt bzw. nach einer Umformung berechenbar sind und welche (so) nicht berechenbar sind. Falls sie berechenbar sind, geben Sie an, welche der Regeln Sie der Reihe nach benutzt haben, und ermitteln Sie das Ergebnis. Falls sie nicht berechenbar sind, geben Sie eine Begründung an.

a) $\int \left(2x^3 - x^2 + 5x - 1 \right) dx$

b) $\int \frac{x}{x^2+1} dx$

c) $\int \frac{1}{(2x+5)^4} dx$

d) $\int \frac{3x^3 - 4}{x^2} dx$

e) $\int \frac{x^3 - 3x + 1}{(x+1)^2} dx$

f) $\int \frac{1}{x+1} dx$

a) mit Regel 1: $= \int 2x^3 dx + \int \left(-x^2\right) dx + \int 5x dx + \int 1 dx$

mit Regel 2: $= 2\int x^3 dx - \int x^2 dx + 5\int x dx + \int 1 dx$

Potenzen ausführlich schreiben: $= 2\int x^3 dx - \int x^2 dx + 5\int x^1 dx + \int x^0 dx$

mit Regel 3a: $= 2 \cdot \frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{3} x^3 + 5 \cdot \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{1} x^1 (+C) = \frac{1}{2} x^4 - \frac{1}{3} x^3 + \frac{5}{2} x^2 + x(+C)$

b) ***(so) nicht berechenbar!*** *(aber wir werden später im Schuljahr sehen, wie's geht)*
Grund: kann nicht in die Form für (3b) gebracht werden

c) als negative Potenz schreiben: $= \int (2x+5)^{-4} dx$

mit Regel 3b: $= \frac{1}{-3} \cdot \frac{1}{2} (2x+5)^{-3} (+C) = -\frac{1}{6} (2x+5)^{-3}$

d) Bruch aufteilen und kürzen: $= \int \left(\frac{3x^3}{x^2} - \frac{4}{x^2} \right) dx = \int \left(3x - \frac{4}{x^2} \right) dx$

mit Regel 1: $= \int 3x dx + \int \left(-\frac{4}{x^2} \right) dx$

mit Regel 2: $= 3 \cdot \int x dx - 4 \cdot \int \frac{1}{x^2} dx$

Potenzen ausführlich schreiben: $= 3 \cdot \int x^1 dx - 4 \cdot \int x^{-2} dx$

mit Regel 3a: $= 3 \cdot \frac{1}{2} x^2 - 4 \cdot \frac{1}{-1} x^{-1} (+C) = \frac{3}{2} x^2 + \frac{4}{x} (+C)$

e) NR: Polynomdivision: $(x^3-3x+1):(x+1)^2 = (x^3-3x+1):(x^2+2x+1) = x - 2 + \frac{3}{x^2+2x+1}$

$= x - 2 + \frac{3}{(x+1)^2}$

also ist zu berechnen: $= \int \left(x - 2 + \frac{3}{(x+1)^2} \right) dx$

mit Regel 1: $= \int x dx - \int 2 dx + \int \frac{3}{(x+1)^2} dx$

mit Regel 2: $= \int x dx - 2 \cdot \int 1 dx + 3 \cdot \int \frac{1}{(x+1)^2} dx$

Potenzen ausführlich schreiben: $= \int x^1 dx - 2 \cdot \int x^0 dx + 3 \cdot \int (x+1)^{-2} dx$

mit Regeln 3a und 3b: $= \frac{1}{2} x^2 - 2 \cdot \frac{1}{1} x^1 + 3 \cdot \frac{1}{-1} (x+1)^{-1} (+C) = \frac{1}{2} x^2 - 2x - \frac{3}{x+1} (+C)$

f) ***(so) nicht berechenbar!*** *(aber wir werden später im Schuljahr sehen, wie's geht)*
Grund: ist zwar in der Form von (3b), aber hier ist n = –1

zur Zusatzfrage: (3a) erhält man aus (3b) mit a = 1, b = 0