Wir betrachten Integrale der Form $\int x^n (\ln(x))^m \, dx$ mit $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}$.

Erst der Spezialfall n = –1:

$$I = \int x^{-1}(\ln(x))^m \, dx = \ln(x) \cdot (\ln(x))^m - \int \ln(x) \cdot m(\ln(x))^{m-1} \cdot \frac{1}{x} \, dx$$

$$= (\ln\,(x))^{m+1} - m \int x^{-1}(\ln(x))^m \, dx = (\ln(x))^{m+1} - m \cdot I$$

$$\Rightarrow I + m \cdot I = (\ln(x))^{m+1}$$

$$\Rightarrow I \cdot (1+m) = (\ln(x))^{m+1}$$

$$\Rightarrow I = \int x^{-1}(\ln(x))^m \, dx = \frac{(\ln\,(x))^{m+1}}{m+1} + C$$

im Folgenden dann: $n \neq -1$

$$\int x^n(\ln(x))^m \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot (\ln(x))^m - \int \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot m(\ln(x))^{m-1} \cdot \frac{1}{x} \, dx$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot (\ln(x))^m - \frac{m}{n+1} \int x^n (\ln(x))^{m-1} \, dx$$

Führt man weitere partielle Integrationen durch, dann sieht man: mit jeder nimmt der Exponent von ln(x) um 1 ab. Man erhält jeweils einen Bruch mit dem Exponenten von ln(x) im Zähler und (n+1) im Nenner. Außerdem ändert sich durch das partiell Integrieren jeweils das Vorzeichen. Das kann man so lange machen, bis man bei $\ln(x)^0$ ankommt, also m mal. Es folgt also:

$$\int x^n(\ln(x))^m \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot (\ln(x))^m - \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{m}{n+1} (\ln(x))^{m-1} + \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{m(m-1)}{(n+1)(n+1)} (\ln(x))^{m-2}$$
$$- \cdots \frac{m(m-1) \cdot 1}{(n+1)(n+1) \cdot \ldots \cdot (n+1)} \int x^n \, dx,$$

und das letzte Integral liefert auch wieder $\frac{x^{n+1}}{n+1}$. Diesen gemeinsamen Faktor kann man also ausklammern:

$$\int x^n(\ln(x))^m \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big((\ln(x))^m - \frac{m}{n+1} (\ln(x))^{m-1} + \frac{m(m-1)}{(n+1)(n+1)} (\ln(x))^{m-2} -$$
$$\cdots \frac{m(m-1) \cdot 1}{(n+1)(n+1) \cdot \ldots \cdot (n+1)} (\ln(x))^0 \Big)$$

Im Nenner steht nun jeweils eine Potenz von (n+1), und die Anzahl der Faktoren entspricht dabei dem, was man im Exponenten von ln(x) jeweils abzieht. Der Zähler im letzten Bruch ist offensichtlich m!, und die Zähler in den Brüchen davor kann man jeweils passend umschreiben:

$$\int x^n(\ln(x))^m \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \left(\frac{\frac{m!}{(m-0)!}}{(n+1)^0} (\ln(x))^{m-0} - \frac{\frac{m!}{(m-1)!}}{(n+1)^1} (\ln(x))^{m-1} + \frac{\frac{m!}{(m-2)!}}{(n+1)^2} (\ln(x))^{m-2} - \right.$$
$$\left. \cdots \frac{\frac{m!}{(m-m)!}}{(n+1)^m} (\ln(x))^{m-m} \right)$$

Mit dem Summenzeichen kann man dies schließlich zusammenfassen zu

$$\int x^n (\ln\,(x))^m dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \frac{\frac{m!}{(m-j)!}}{(n+1)^j} (\ln(x))^{m-j} + C$$