

$$0) \int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} [-e^{-x}]_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (-e^{-b} + 1) = 1$$

$$1) \int_0^{\infty} x e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b x e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} ([-x e^{-x}]_0^b - \int_0^b -e^{-x} dx) \\ = \lim_{b \rightarrow \infty} (-b e^{-b} + 0 + \int_0^b e^{-x} dx) = 0 + \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1 \quad (\text{mit (0)})$$

$$2) \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b x^2 e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} ([-x^2 e^{-x}]_0^b - \int_0^b -2x e^{-x} dx) \\ = \lim_{b \rightarrow \infty} (-b^2 e^{-b} + 0 + 2 \int_0^b x e^{-x} dx) = 0 + 2 \int_0^{\infty} x e^{-x} dx = 2 \cdot 1 = 2 \quad (\text{mit (1)})$$

$$3) \int_0^{\infty} x^3 e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b x^3 e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} ([-x^3 e^{-x}]_0^b - \int_0^b -3x^2 e^{-x} dx) \\ = \lim_{b \rightarrow \infty} (-b^3 e^{-b} + 0 + 3 \int_0^b x^2 e^{-x} dx) = 0 + 3 \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx = 3 \cdot 2 = 6 \quad (\text{mit (2)})$$

Es folgt die allgemeine Regel:

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = n \cdot (n-1) \dots \cdot 2 \cdot 1 = n! \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

Anmerkung:

Definiert man allgemein die sogenannte Gamma-Funktion

$$\Gamma(n) := \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx,$$

dann folgt $\Gamma(n) = (n-1)!$. Da dieses Integral aber prinzipiell auch für nicht-natürliche Zahlen n ausgerechnet werden kann, hat man damit eine Verallgemeinerung der Fakultät auf beliebige **reelle** Zahlen $n \geq 1$. Z. B. könnte man nun auch $\Gamma(\pi + 1) = \int_0^{\infty} x^{\pi} e^{-x} dx$ berechnen, was in gewissem Sinne dann eben $\pi!$ wäre.

Man kann das aber auch ganz anders rechnen: Man betrachtet zunächst ein Integral, das erst mal etwas komplizierter aussieht, weil es auch noch von einem Parameter t abhängt:

$$\int_0^{\infty} e^{-tx} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-tx} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{t} e^{-tx} \right]_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{t} e^{-b} + \frac{1}{t} \right) = \frac{1}{t}$$

Weil das für alle Werte $t > 0$ richtig ist, können wir dies auch nach t ableiten:

$$\frac{d}{dt} \int_0^{\infty} e^{-tx} dx = \frac{d}{dt} \frac{1}{t} = -\frac{1}{t^2}$$

andererseits können wir die Ableitung aber auch unter dem Integral durchführen (warum das erlaubt ist, müsste man noch begründen...):

$$\frac{d}{dt} \int_0^{\infty} e^{-tx} dx = \int_0^{\infty} \left(\frac{d}{dt} e^{-tx} \right) dx = \int_0^{\infty} (-x e^{-tx}) dx$$

Also folgt für $t = 1$ (wenn man noch mit -1 multipliziert):

$$\int_0^{\infty} x e^{-x} dx = 1$$

ebenso rechnet man:

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_0^{\infty} e^{-tx} dx = \frac{d^2}{dt^2} \frac{1}{t} = \frac{2}{t^3} = \int_0^{\infty} \left(\frac{d^2}{dt^2} e^{-tx} \right) dx = \int_0^{\infty} x^2 e^{-tx} dx \rightarrow \text{für } t = 1: \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx = 2$$

$$\frac{d^3}{dt^3} \int_0^{\infty} e^{-tx} dx = \frac{d^3}{dt^3} \frac{1}{t} = -\frac{6}{t^4} = \int_0^{\infty} \left(\frac{d^3}{dt^3} e^{-tx} \right) dx = \int_0^{\infty} (-x^3 e^{-tx}) dx \rightarrow \text{für } t = 1: \int_0^{\infty} x^3 e^{-x} dx = 6$$

Auch auf diese Weise folgt also wieder allgemein:

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = n \cdot (n-1) \dots \cdot 2 \cdot 1 = n! \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$