0) $\int_0^\infty e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty} [-e^{-x}]_0^b = \lim_{b\to\infty} \left(-e^{-b}+1\right) = 1$

1) $\int_0^\infty x\, e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b xe^{-x}dx = \lim_{b\to\infty} \left([-xe^{-x}]_0^b - \int_0^b -e^{-x}dx\right)$

$= \lim_{b\to\infty} \left(-be^{-b} + 0 + \int_0^b e^{-x}dx\right) = 0 + \int_0^\infty e^{-x}dx = 1$ (mit (0))

2) $\int_0^\infty x^2\, e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b x^2e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty} \left([-x^2e^{-x}]_0^b - \int_0^b -2xe^{-x}dx\right)$

$= \lim_{b\to\infty} \left(-b^2e^{-b} + 0 + 2\int_0^b xe^{-x}dx\right) = 0 + 2\int_0^\infty xe^{-x}dx = 2\cdot 1 = 2$ (mit (1))

3) $\int_0^\infty x^3\, e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b x^3e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty} \left([-x^3e^{-x}]_0^b - \int_0^b -3x^2e^{-x}dx\right)$

$= \lim_{b\to\infty} \left(-b^3e^{-b} + 0 + 3\int_0^b x^2e^{-x}dx\right) = 0 + 3\int_0^\infty x^2e^{-x}dx = 3\cdot 2 = 6$ (mit (2))

Es folgt die allgemeine Regel:

$\int_0^\infty x^n\, e^{-x}dx = n\cdot(n-1)\ldots\cdot 2\cdot 1 = n!$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Anmerkungen:

1) Durch die Substitution $z = e^{-x}$ kann man das Integral umformen zu

$$\int_0^1 (-\ln(z))^n\, dz = n!,$$

mit der Substitution $z = \sqrt{x}$ erhält man dagegen

$$\int_0^\infty z^{2n+1}e^{-z^2}\, dz = \frac{n!}{2}$$

und hat damit gleich noch zwei weitere große Klassen von Integralen berechnet.

2) Man kann das aber auch ganz anders rechnen: Man betrachtet zunächst ein Integral, das erst mal etwas komplizierter aussieht, weil es auch noch von einem Parameter t abhängt:

$$\int_0^\infty e^{-tx}dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-tx}dx = \lim_{b\to\infty} \left[-\tfrac{1}{t}e^{-tx}\right]_0^b = \lim_{b\to\infty} \left(-\tfrac{1}{t}e^{-b} + \tfrac{1}{t}\right) = \tfrac{1}{t}$$

Weil das für alle Werte t > 0 richtig ist, können wir dies auch nach t ableiten:

$$\frac{d}{dt}\int_0^\infty e^{-tx}dx = \frac{d}{dt}\tfrac{1}{t} = -\frac{1}{t^2}$$

andererseits können wir die Ableitung aber auch unter dem Integral durchführen (warum das erlaubt ist, müsste man noch begründen…):

$$\frac{d}{dt}\int_0^\infty e^{-tx}dx = \int_0^\infty \left(\frac{d}{dt}e^{-tx}\right)dx = \int_0^\infty (-xe^{-tx})dx$$

Also folgt für t = 1 (wenn man noch mit –1 multipliziert):

$$\int_0^\infty xe^{-x}dx = 1$$

ebenso rechnet man:

$\frac{d^2}{dt^2}\int_0^\infty e^{-tx}dx = \frac{d^2}{dt^2}\frac{1}{t} = \frac{2}{t^3} = \int_0^\infty \left(\frac{d^2}{dt^2}e^{-tx}\right)dx = \int_0^\infty x^2 e^{-tx}dx$ ➔ für t = 1: $\int_0^\infty x^2 e^{-x}dx = 2$

$\frac{d^3}{dt^3}\int_0^\infty e^{-tx}dx = \frac{d^3}{dt^3}\frac{1}{t} = -\frac{6}{t^4} = \int_0^\infty \left(\frac{d^3}{dt^3}e^{-tx}\right)dx = \int_0^\infty (-x^3 e^{-tx})dx$ ➔ für t = 1: $\int_0^\infty x^3 e^{-x}dx = 6$

Auch auf diese Weise folgt also wieder allgemein:

$\int_0^\infty x^n\, e^{-x}dx = n \cdot (n-1) \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ für alle $n \in \mathbb{N}$

3) Definiert man allgemein die sogenannte Gamma-Funktion

$$\Gamma(n) \coloneqq \int_0^\infty x^{n-1}\, e^{-x}dx,$$

dann folgt $\Gamma(n) = (n-1)!$. Da dieses Integral aber prinzipiell auch für nicht-natürliche Zahlen n ausgerechnet werden kann, hat man damit eine Verallgemeinerung der Fakultät auf beliebige ***reelle*** Zahlen n ≥ 1.

Z. B. könnte man nun auch $\Gamma(\pi + 1) = \int_0^\infty x^\pi\, e^{-x}dx$ berechnen, was in gewissem Sinne dann eben π! wäre. Oder auch: $\left(\frac{1}{2}\right)! = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \int_0^\infty x^{1/2}\, e^{-x}dx$; man kann zeigen, dass dies den Wert $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ hat. Mithilfe der Gamma-Funktion kann man dann noch viele weitere interessante Rechnungen machen, z. B. kann man zeigen, dass e und nicht nur irrationale Zahlen sind (wie ja z. B. auch $\sqrt{2}$), sondern sogar sogenannte transzendente Zahlen (d. h., sie sind keine Lösungen von Polynomgleichungen mit rationalen Koeffizienten – im Gegensatz zu algebraischen Zahlen wie eben z. B. $\sqrt{2}$, was ja eine Lösung der Gleichung $x^2 = 2$ ist). Den (länglichen!) Beweis findet man hübsch aufbereitet z. B. in diesem Video: https://www.youtube.com/watch?v=WyoH_vgiqXM