Integrale mit ln, tan, arctan

Zunächst berechnen wir $I = \int_0^{\pi/4} \ln\,(\tan(x) + 1)\, dx$. Das sieht reichlich schwierig aus, mit ein paar Tricks wird es aber schließlich sehr einfach werden. Wir machen erst mal die Substitution $x = \frac{\pi}{4} - z$, was sofort dx = –dz ergibt. Wenn wir die Grenzen auch umrechnen, erhalten wir

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} - z\right) + 1\right)(-dz) = \int_0^{\pi/4} \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} - z\right) + 1\right) dz,$$

was leider sogar komplizierter aussieht als vorher… Für den Tangens gibt es allerdings ein „Additionstheorem", das man sich schnell aus den Additionstheoremen für Sinus und Cosinus aus der Formelsammlung herleiten kann:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin\,(\alpha + \beta)}{\cos\,(\alpha + \beta)} = \frac{\sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin\,(\beta)}$$

Kürzt man diesen Bruch mit $\cos(\alpha)\cos(\beta)$, dann wird das zu

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\frac{\sin(\alpha)}{\cos\,(\alpha)} + \frac{\sin(\beta)}{\cos\,(\beta)}}{1 - \frac{\sin(\alpha)}{\cos\,(\alpha)}\frac{\sin(\alpha)}{\cos\,(\alpha)}} = \frac{\tan\,(\alpha) + \tan\,(\beta)}{1 - \tan\,(\alpha)\tan\,(\beta)}.$$

Damit folgt: $\tan\left(\frac{\pi}{4} - z\right) = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) + \tan\,(-z)}{1 - \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\tan\,(-z)} = \frac{1 - \tan\,(z)}{1 + \tan\,(z)}$, also

$$\ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} - z\right) + 1\right) = \ln\left(\frac{1 - \tan\,(z)}{1 + \tan\,(z)} + 1\right).$$

Sieht leider noch komplizierter aus als vorher. Nun können wir aber alles auf einen Bruchstrich bringen, zusammenfassen und schließlich eine Logarithmusrechenregel anwenden:

$$\ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} - z\right) + 1\right) = \ln\left(\frac{1 - \tan\,(z)}{1 + \tan\,(z)} + \frac{1 + \tan\,(z)}{1 + \tan\,(z)}\right) = \ln\left(\frac{2}{1 + \tan\,(z)}\right)$$
$$= \ln(2) - \ln(\tan(z) + 1)\,;$$

also folgt

$$I = \int_0^{\pi/4} (\ln(2) - \ln(\tan(z) + 1))\, dz = \int_0^{\pi/4} \ln(2)\, dz - \int_0^{\pi/4} \ln(\tan(z) + 1)\, dz$$

Das erste Integral können wir nun aber sofort ausrechnen (der Integrand ist ja einfach eine Konstante), und das zweite Integral ist genau wieder das ursprüngliche Integral I (dass die Integrationsvariable hier z heißt statt x, ändert ja nichts am Wert des Integrals). Wir haben also:

$$I = \frac{\pi}{4}\ln(2) - I \Rightarrow 2I = \frac{\pi}{4}\ln(2),$$

und damit folgt schließlich

$$I = \int_0^{\pi/4} \ln\,(\tan(x) + 1)\, dx = \frac{\pi}{8}\ln(2).$$

Mit diesem Ergebnis erhalten wir nun relativ schnell auch noch zwei andere Integrale. Als erstes berechnen wir $\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x^2+1} dx$. Mit der Substitution $x = \tan(z)$, also $dx = (1 + \tan^2(z))dz$, wird das zu

$$\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x^2+1} dx = \int_0^{\pi/4} \frac{\ln(\tan(z)+1)}{\tan^2(z)+1} (1 + \tan^2(z))\, dz = \int_0^{\pi/4} \ln(\tan(z)+1)\, dz,$$

und genau dieses Integral hatten wir ja eben berechnet! (Wieder: Dass die Integrationsvariable nun z heißt statt x, ändert ja nichts am Wert des Integrals.) Also folgt

$$\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{8} \ln(2).$$

Außerdem können wir nun auch $\int_0^1 \frac{\arctan(x)}{x+1} dx$ berechnen. Denn mit partieller Integration wird das zu

$$\int_0^1 \frac{\arctan(x)}{x+1} dx = [\arctan(x) \cdot \ln(x+1)]_0^1 - \int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x^2+1} dx$$

$$= \arctan(1) \cdot \ln(2) - \arctan(0) \cdot \ln(1) - \frac{\pi}{8} \ln(2) = \frac{\pi}{4} \ln(2) - \frac{\pi}{8} \ln(2),$$

sodass wir am Schluss wieder dasselbe Ergebnis erhalten:

$$\int_0^1 \frac{\arctan(x)}{x+1} dx = \frac{\pi}{8} \ln(2).$$